UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO–MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS ELEMENTALES

PUEBLA, PUE., OTOÑO DE 2010
(REV. 2 DE JULIO DE 2016)

A esa
de quien olvidé sus generales
pero recuerdo sus particulares

PROLEGÓMENO

El verano de 1991 vio nacer un libro escrito por un grupo de profesores de la Facultad de Ciencias Físico–Matemáticas —"*La Comisión*" (Celestino Soriano Soriano, Juan Angoa Amador, Jaime Arroyo García David Herrera Carrasco, Agustín Contreras Carreto, Fernando Velázquez Castillo y Raúl Linares García) — y que lleva el mismo nombre que la materia para la que serv ía de texto: "Matemáticas Básicas". En vista de la "renovación" de los planes de estudio realizadas en la B.U.A.P. desde 1992, fue necesaria la adaptación de dicha obra, introduciendo algunos temas, reduciendo otros y transformando otros más, hasta dar a luz a un un hijo bastardo del "Matemáticas Básicas" en la misma facultad, pero cuatro veranos después que su padre, y con una finalidad análoga: servir de texto para el curso que le dá nombre: "Matemáticas Elementales".

Los parteros —"*Una subcomisión*" de la "*La Comisión*– esperan con fervor que, en este nene, los genes heredados y las mutaciones operadas, sean las adecuadas ya que, de resultar contrahecho, tendrá que ser abandonado en "la Peña"de los espartanos y los únicos responsables de ello —"*Una subcomisión*– serán merecedores de una "actuación" en el circo romano.

El trabajo de transcribir nuestro manuscrito a LaTeX, fue realmente ciclópeo. Agradecemos infinitamente a Luis Alberto Torres Ramírez el que se hubiera animado a realizarlo.

ATENTAMENTE

"*Una subcomisión*"

J. Juan Angoa Amador
Agustín Contreras Carreto
Manuel Ibarra Contreras
Raúl Linares Gracia
Armando Martínez García

Índice general

1. Lógica **1**

1.1. Introducción 1
1.2. Proposiciones lógicas y conectivos 2
1.3. Tablas de verdad y equivalencias 5
1.4. Cuantificadores 14
1.5. Razonamiento 24
1.6. Métodos de Demostración 32
1.6.1. Demostraciones directas. 34
1.6.2. Demostraciones indirectas. 37
1.6.3. Ejemplos y contraejemplos 40
1.7. Apéndice 1 43
1.8. Apéndice 2 47

2. Conjuntos **48**

2.1. Introducción 48
2.2. Conjunto Universal 55
2.3. Subconjuntos 56
2.4. Igualdad de conjuntos 59
2.5. Construcción de nuevos conjuntos a partir de otros 63

3. Números reales **73**

3.1. Introducción 73
3.2. Consecuencias de los Axiomas de Campo 76
3.3. Consecuencias de los Axiomas de Orden 90
3.4. El Axioma del Supremo 121
3.5. Los números Naturales 133
3.6. Números Enteros, Racionales e Irracionales 146

3.7. Representación a-naria 168
3.8. Apéndice 1 203

4. Funciones **206**
4.1. Introducción 206
4.2. Formas de definir una función 215
4.3. Igualdad de funciones 227
4.4. Gráfica de una función 229
4.5. Composición de funciones 239
4.6. Funcion inyectivas 243
4.7. Funciones suprayectivas 248
4.8. Funcion biyectivas 253
4.9. Función inversa 254
4.10. Algebra de funciones reales 260
4.11. Algunas funciones especiales 268

Capítulo 1

LÓGICA

§1

1.1. Introducción

En el lenguaje cotidiano las expresiones adolecen de poder tener distintos significados, cosa que hace interesante a la literatura, pero en matemáticas no podemos darnos ese lujo: no es posible que cada quien le de un significado distinto a expresiones como "si x es mayor que 3, entonces x es mayor que 2".

Con la intención de, en la medida de lo posible, darle exactitud al discurso, el estudio de los procesos lógicos cobra interés. También es necesario distinguir entre argumentos correctos, Recordar que en matemáticas así como en la ciencia, la actividad demostrativa juega un papel importante.

En este curso no pretendemos estudiar a fondo la lógica formal, sino reafirmar algunas actividades centrales como: **analizar la estructura lógica del discurso matemático, así como decidir si los pasos que se siguen en una demostración son válidos o no**.

§2

1.2. Proposiciones lógicas y conectivos

Para nuestros propósitos una frase que tenga la propiedad de ser falsa o verdadera y sólo una de estas posibilidades se llamará Proposición Lógica.

Si una proposición es verdadera diremos que su valor de verdad es V, y si es falsa diremos que su valor de verdad es F.

La frase ¡Viva México!, al interrogarse de si es verdadera o falsa, uno encontrará que no es ninguna de las dos cosas. Podemos concluir que dicha frase no es proposición lógica.

Ahora veamos las siguientes proposiciones lógicas:

a) $1 + 1 = 2$

b) La suma de números enteros es un número entero.

c) 3 es mayor que 2.

d) 4 es un número negativo.

e) Está lloviendo ahora en la Plaza Roja de Moscú.

Es claro que todas ellas sí tienen un valor de verdad; es más, podemos afirmar que las tres primeras son verdaderas y la penúltima es falsa. Resumiendo: a), b) y c) tienen valor de verdad V y d) tiene valor de verdad F. ¡Atención!: La proposición e) es proposición lógica a pesar de no poder decidir su valor de verdad (desde C.U. y sin la magia de la comunicación).

Analicemos las siguientes proposiciones lógicas:

a) 3 y 2 son números enteros.

b) México y Guatemala son países centroamericanos.

c) $3 + 1 = 4$ y $2 + 2 = 4$.

Notemos que tienen una forma común:

$$(\ldots\ldots) \quad \text{y} \quad (\ldots\ldots),$$

donde los paréntesis $(\ldots\ldots)$ representan proposiciones lógicas. Las proposiciones lógicas a), b) y c) escritas en esta forma quedan:

a) 3 es número entero y 2 es número entero.

b) México es país centroamericano y Guatemala es país centroamericano.

c) $3 + 1 = 4$ y $2 + 2 = 4$

Esto nos lleva a la definición:

Definición 1.2.1 Si una proposición lógica se puede llevar a la forma:

$$(\textsc{Proposición}) \quad \text{y} \quad (\textsc{proposición}),$$

a tal proposición se le llama **conjunción**.

En seguida enunciaremos formas clásicas de proposiciones lógicas que nos permitan una clasificación inicial de éstas.

Definición 1.2.2 Cuando una proposición se puede llevar a la forma:

$$(\textsc{proposición}) \quad \text{o} \quad (\textsc{proposición}),$$

a dicha proposición se le llamará **disyunción**.

Definición 1.2.3 si una proposición lógica se puede escribir en la forma:

$$\text{Si } (\textsc{proposición}) \quad \text{entonces} \quad (\textsc{proposición}),$$

a tal proposición se le llamará **implicación** o **condicional**.

Es conveniente saber que la proposición condicional si p entonces q, también se puede escribir como:

q si p,
p implica q,
p sólo si q,
p es suficiente para q,
q es necesaria para p y
q siempre que p.

Definición 1.2.4 Llamaremos **negación** a la proposición que tenga la forma:

Es falso que (PROPOSICIÓN).

Ejemplos:

1. Si está lloviendo me mojaré. *(condicional)*
2. Juan es electrónico y Pedro también. *(conjunción)*
3. El día de mañana será lluvioso o caluroso. *(disyunción)*
4. 3 o 2 son mayores que 1. *(disyunción)*
5. No es posible que exista transporte barato y cómodo. *(negación)*
6. Sólo estudiando aprobaré el curso. *(implicación)*

En las proposiciones del tipo disyunción, conjunción e implicación, participan dos proposiciones. En las disyunciones y conjunciones es indistinto donde se coloquen tales proposiciones; sin embargo, en la implicación no. Así:

"si llueve me mojo"

cambia radicalmente si se transforma en

"si me mojo entonces llueve".

Para distinguir el diferente papel que juegan las dos proposiciones que forman la implicación, tenemos:

Definición 1.2.5 En una impicación llamaremos **antecedente** a la proposición colocada entre "si" y "entonces" y llamaremos **consecuente** a la proposición colocada después de "entonces".

Veamos las proposiciones:

1. Es condición suficiente para que Avelino vuele, ser poeta.

2. Jaime podrá adelgazar si deja de comer.

1 y 2 son condicionales ya que se pueden escribir de la forma:

1. Si Avelino es poeta, Avelino vuela.

2. Si Jaime deja de comer entonces Jaime podrá adelgazar.

Ya escritas así uno podrá distinguir claramente el antecedente y el consecuente.

Finalmente, a las siguientes partículas: y, o, si ... entonces ..., es falso que, se les agrupa con el nombre de conectivos lógicos. También a partir de ahora, escribiremos simplemente proposición en vez de proposición lógica.

§3

1.3. Tablas de verdad y equivalencias

Planteamos las siguientes preguntas:

¿Es posible que una conjunción sea verdadera si alguna de las proposiciones que la forman es falsa?

¿Bajo qué condiciones de las proposiciones inmersas en una conjunción, ésta podrá ser falsa?

Para dar luz acerca de estas preguntas, va la:

Definición 1.3.1 Una conjunción es verdadera cuando y sólo cuando las dos proposiciones que la forman son verdaderas.

Análogas preguntas podrían plantearse respecto de las disyunción y de la negación. Para esto:

Definición 1.3.2 Una disyunción es verdadera cuando y sólo cuando alguna de las proposiciones que la forman es verdadera.

Definición 1.3.3 Una negación es verdadera si y sólo si la proposición negada es falsa.

Ahora bien, ¿pasa con la implicación?
Veamos las siguientes proposiciones:

"si dos es par, entonces $3 + 2$ es impar ".
"siempre que dos es par, $3 + 2$ es impar ".
"No ocurre que dos sea par y $3 + 2$ no sea impar ".

Intuitivamente podemos aceptar que las tres proposiciones dicen lo mismo, es decir, estamos aceptando que:

"Una implicación es la negación de una conjunción".

Así que una implicación es verdadera si la conjunción es falsa; pero la tal conjunción está constituída por el antecedente y la negación del consecuente de la implicación; así que la conjunción será falsa si el antecedente es falso o el consecuente es verdadero. Resumiendo:

Definición 1.3.4 Una implicación es verdadera en cualquiera de los dos casos siguientes:

a) El consecuente es verdadero.

b) El antecedente es falso.

Observando estas condiciones, vemos que la única posibilidad que no se incluye es cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Una manera de recordar esta conclusión es usando la siguiente afirmación:

"Nunca una verdad implica una falsedad".

En lo que sigue adoptaremos formas simbólicas para las proposiciones. Así las letras p, q, r, s, t, ..., simbolizarán proposiciones, y nuestros tipos de proposiciones se simbolizarán:

1) $p \wedge q$ conjunción de las proposiciones p y q.

2) $p \vee q$ disyunción de la proposiciones p y q.

3) $\neg q$ negación de la proposición q.

4) $p \Rightarrow q$ implicación con antecedente p y consecuente q.

Ahora, si tenemos una proposición en forma simbólica, trataremos de sacar información acerca del comportamiento de su valor de verdad; para ésto, listaremos todas las combinaciones posibles en que aparezcan los valores de verdad de las proposiciones que forman tal proposición. Por ejemplo:

$$\neg(\neg p \wedge q)$$

tiene 4 posibles combinaciones, a saber:

1) p verdadera y q verdadera.

2) p falsa y q verdadera.

3) p verdadera y q falsa.

4) p falsa y q falsa.

En cada uno de estos casos, cada combinación determina un valor de verdad para $\neg(\neg p \wedge q)$ (¡claro!, uno de los dos posibles, F o V).

Enseguida ilustraremos una forma de listar las combinaciones de valores de verdad, así como sus consecuencias en el valor de verdad de la porposición total.

p	q	$\neg p \wedge q$	$\neg(\neg p \wedge q)$
V	V	F	V
F	V	F	F
V	F	F	V
F	F	F	V

A tal lista se le llama **Tabla de verdad** de la proposición.

Ahora observaremos la siguiente proposición:

"Pedro es carpintero o no lo es"

Tiene la forma simbólica $p \vee \neg p$, donde p simboliza la proposición "Pedro es carpintero". Su tabla de verdad es:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

es decir, $p \vee \neg p$, sea como sea p, siempre es verdadera; su verdad no depende de quién sea p, sino de *la forma* que tiene la proposición.

Una técnica con la que podremos saber cuándo una proposición es verdadera por su forma, seía:

"Escribamos la proposición en la forma simbólica; construyamos su tabla de verdad y si siempre es verdadera, entonces tal proposición es verdadera por su forma".

Definición 1.3.5 Las proposiciones lógicas que son verdaderas por su forma son llamadas **Tautologías**.

Es importante tener en mente las principales formas simbólicas que dan lugar a tautologías. algunas de éstas se podrán hallar en los ejercicios o explícitamente en los siguientes temas.

Observemos las siguientes parejas de proposiciones:

1) Ni Pedro ni Juan son matemáticos.

2) Es falso que Pedro o Juan sean matemáticos.

Notamos que dicen lo mismo; sin embargo quisieramos tener un método, más seguro que la intuición, para asegurarnos que dos proposiciones dicen lo mismo. Para esto notemos que si dos proposiciones tinen igual contenido, no puede suceder que una de ellas sea falsa y la otra verdadera, asi que deben cumplir que ambas son verdaderas o ambas son falsas. Para continuar con esto analicemos la siguiente forma:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

El estudiante comprobará sin lugar a dudas que esta proposición es falsa si p y q no coinciden en sus valores de verdad. Con esto justificamos la siguiente:

Definición 1.3.6 Dos proposiciones p y q son **equivalentes** (tienen el mismo contenido) si

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

es tautología.

Simbolizaremos que p y q son equivalentes escribiendo: $p \equiv q$

Nota 1 $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ se simboliza como:

$$(p \Leftrightarrow q)$$

y se lee: "p si y sólo si q"

A este tipo de proposiciones se les llama **bicondicionales**.

Nota 2 $2 = 1 \Leftrightarrow$ "Salinas fue un presidente muy honrado".

es una bicondicional verdadera, evidentemente, aunque no es tautología. ¿Por qué?

Nota 3 La proposición:

"Si don Próspero Torres es dueño de una parcela, entonces voto por el tricolor".

es de la forma $p \Rightarrow q$, donde p: "Don Próspero Torres es dueño de una parcela" y q: "Don Próspero Torres voto por el tricolor" y es equivalente a su **contrarecíproca** ($\neg q \Rightarrow \neg p$, ver ejercicio 7,b) de Ejercicios 2), es decir:

"Si Don Próspero Torres no vota por el tricolor entonces no será dueño de una parcela"

La misma proposición se puede escribir como:

"Es necesario que Don Próspero Torres vote por el tricolor para que sea dueño de una parcela"

Por otro lado, hemos sabido que Don Próspero Torres sigue gritando: "Yo soy campesino y no tengo tierra" (ver "Matemáticas Básicas" UAP 1991 ***La Comisión***), y eso que ha votado por el tricolor, es decir q es condición necesaria pero no suficiente para que ocurra p.

Así que, en general una bicondicional, $q \Leftrightarrow p$, suele leerse "p es condición necesaria y suficiente para q" o "q es condición necesaria y suficiente para p" (al fin y al cabo son equivalentes $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$.

Ejercicios 1.

1. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son proposiciones lógicas?

a) ¿Come o fuma?

b) ¡Come o fuma!

c) 3 es mayor que 4.

d) Todos los triángulos son equilateros.

2. Clasifique las siguientes proposiciones de acuerdo a nuestras definiciones. En las negaciones, aclare cuáles son las proposiciones negadas.

a) El carro de Pedro es tan bueno como el de Juan.

b) No es posible que exista Transporte barato y cómodo.

c) Aunque 3 no es par, sí es primo.

d) Si los precios aumentan, los salarios aumentan.

e) Es falso que la natalidad disminuya en los países pobres.

f) Es falso tanto que México es una potencia como que es un país pobre.

g) Sólo si David trabaja podrá dejar el vicio.

h) Alguno de los dos casos sucede: si 3 es par entonces $3 + 2$ es impar o si 3 es par entonces $3 + 2$ es par.

i) es falso que todo triángulo es equilátero y es escaleno, pero es verdad que algunos triángulos son equiláteros y otros no.

j) Sólo cuando estemos organizados será posible cambiar el Estado.

3. En las siguientes condicionales diga cuál es el antecedente y cuál el consecuente.

a) Queda claro que siempre que Pedro ha resuelto los problemas, Luis se los ha copiado.

b) Si fuera 3 no primo, tendría otros divisores distintos de 1 y 3.

c) Resulta que si usas automóvil, inmediatamente tienes problemas cardíacos.

d) Al menos cada vez que tu maestro me ha explicado el tema de funciones, a mí no me ha quedado claro.

¿No se ha cansado todavía? Aúpe su existencia con estos otros.

Ejercicios 2.

1. Denote con s la proposición "yo estudio", y con p la proposición "yo pasaré el curso". Exprese simbólicamente las siguientes proposiciones:

   a) No estudio.

   b) Si estudio pasaré el curso.

   c) Pasaré el curso solamente si estudio.

   d) Pararé el curso si estudio.

   e) Estudio o no pasaré el curso.

   f) Si estudio no pasaré el curso.

   g) Ni estudio ni pasaré el curso.

   h) Pasaré el curso si y solamente si estudio.

2. Suponga que l es la proposición "la lógica es fácil" y que m es la proposición "las matemáticas son fáciles". Exprese con palabras las siguientes proposiciones:

   a) $l \wedge m$ b) $\neg l$ c) $\neg m \wedge \neg l$
   c) $l \Rightarrow m$ d) $l \Leftrightarrow m$ e) $\neg l \Rightarrow \neg m$

3. Calcule el valor de verdad de las siguientes proposiciones, suponga que p es verdadera y q es falsa.

   a) $p \wedge q$ b) $p \wedge \neg q$ c) $\neg(p \vee q)$
   d) $p \vee (\neg p \wedge q)$ e) $q \Rightarrow p$ f) $\neg q \Rightarrow (p \vee q)$
   g) $\neg(q \Rightarrow (p \vee q))$ h) $\neg(p \Leftrightarrow q)$ i) $p \Rightarrow (\neg p \wedge q)$

4. Calcule el valor de verdad de las siguientes proposiciones, usando los conocimientos matemáticos que hasta la fecha posea.

a) 3 es mayor que 2 o 3 es igual a 2.

b) Si 2 fuera mayor que 4 entonces 3 sería mayor que 4.

c) Si 2 fuera mayor que 4 entonces 3 sería igual a 2.

d) Ni 3 ni 7 son pares.

e) Si 3 fuera par, 3 + 2 también lo sería.

f) 4 u 8 son pares.

g) Es falso que: 8 y 2 son impares.

h) 3 no es par o 7 es par.

5. ¿Cuáles de las siguientes formas dan lugar a tautologías:
a) $(p \wedge q) \Rightarrow p$ b) $(p \vee q) \Rightarrow q$ c) $(p \wedge \neg p) \Rightarrow r$ d) $p \Rightarrow \neg p$
e) $[(p \wedge (q \Rightarrow q)) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow r$ f) $(p \wedge \neg p \Rightarrow (r \wedge \neg r)$
g) $[(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ h) $[(p \vee q) \wedge ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))] \Rightarrow r$
i) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \Rightarrow (r \wedge \neg r)]$

6. ¿Cuáles de los siguientes pares de proposiciones son equivalentes?:

a) Ni 3 ni 7 son pares.
Es falso que: 3 o 7 son pares.

b) 3 es par pero 7 es impar.
Es falso que: 3 par implica que 7 es par.

c) Si 3 es par entonces 5 es par.
Si 5 es impar entonces 3 es impar.

d) Sólo si lavas los platos vas al cine.
Si lavas los platos vas al cine.

7. Demuestre que las siguientes formas dan lugar a tautologías:

a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \Rightarrow (r \wedge \neg r)]$

b) $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

c) $\neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

d) $\neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

e) $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

$f)$ $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

$g)$ $[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$

$h)$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

$i)$ $[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$

$j)$ $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

$k)$ $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

$l)$ $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

§4

1.4. Cuantificadores

Analicemos las siguientes proposiciones:

1) Todos los automóviles son enfriados por agua.

2) Hay mujeres solteras.

3) Algún estudiante de la BUAP es millonario.

Estas proposiciones tienen en común que son afirmaciones acerca de un conglomerado o conjunto de objetos. Así, la primera es una afirmación sobre el conjunto de automóviles, la segunda sobre el conjunto de las mujeres, etc...

Ahora toca discutir algún método para calcular el valor de verdad de este tipo de proposiciones. Así pues, para el primer ejemplo, concluir que es verdadera tal proposición, sería sólo cuando hubiéramos investigado **todos y cada uno** de los automóviles y además supiéramos que **todos y cada uno de ellos** son efectivamente enfriados por agua. Sabemos que existe un automóvil de conocida marca que no es enfriado por agua; entonces podemos concluir que la proposición 1) es falsa. Sin embargo, para la segunda proposición, para ser verdadera se necesitará sólo que,

para algún elemento del conjunto, la afirmación sea verdadera, y ¡claro que es verdadera!: cualquier solterona puede servir como justificante.

Si ahora convenimos en que:

U denota la colección de todos los automóviles,
$\forall$ denota las frases "cada uno", "para cada", "para todo", "todo", "cualquiera" o cualquier otra del mismo tipo.

$x \in U$ denota la frase "x pertenece a U",

nuestra proposición 1) quedaría simbólicamente como:

$$\forall\, x \in U : x \text{ es enfriado por agua.}$$

Es más, si $p(x)$ simboliza: "x enfriado por agua", nuestra proposición quedaría:

$$\forall\, x \in U : p(x)$$

U	se denomina conjunto universo.
$\forall$	se denomina cuantificador universal.
$p(x)$	se denomina frase abierta en U

Las proposiciones del tipo:

$$\forall\, x \in U : p(x)$$

son verdaderas si la frase $p(x)$ se convierte en una proposición verdadera cada vez que x sea reemplazada por cualquier elemento de U y falsa en caso contrario.

Ahora, si $\exists$ denota las frases: "hay", "algunos", "algún", "existe" o cualquiera otra del mismo jaez, U denota el conjunto de estudiantes de la BUAP y $q(x)$ la frase abierta: "x es millonario", la tercera proposición de los ejemplos quedaría simbolizada:

$$\exists\, x \in U : q(x)$$

y proposiciones de este tipo son verdaderas siempre que se pueda encontrar un elemento a de U que haga verdadera a $p(x)$ es decir, que $p(a)$ sea una proposición verdadera.

¡Atención! : Para que expresiones del tipo:

$$\forall\, x \in U : p(x) \quad \text{o} \quad \exists\, x \in U : p(x)$$

sean efectivamente proposiciones lógicas, $p(x)$ debe ser una frase abierta tal que cada elemento a de U, $p(a)$ sea una proposición lógica.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos:

1) Todos los músicos son gente alegre.

2) Todas las personas que no son alegre no son músicos.

   1) en forma simbólica queda:

$$\forall\, x \in U : p(x) \Rightarrow q(x),$$

   donde U denota el conjunto de los seres humanos y

$$\begin{array}{ll} p(x) \text{ la frase} & : x \text{ es músico, y} \\ q(x) \text{ la frase} & : x \text{ es alegre.} \end{array}$$

   2) en forma simbólica es:

$$\forall\, x \in U : \neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)$$

3) Dos números primos diferentes son coprimos. Este ejemplo motiva la presentación de las proposiciones abiertas en mas de una variable. Observemos las siguientes proposiciones abiertas:

p y q son coprimos.

x es mayor que y.

Si $x + y = x + z$, entonces $y = z$.

Aquí las variables pueden tomar valores en diferentes conjuntos universales o en el mismo, pero eso se entiende del contexto en que se dé la proposición en particular.

Así, si $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los enteros, nuestra proposición escrita en forma esquemática quedaría como sigue:

$$\forall\, p \in \mathbb{Z} : \forall\, q \in \mathbb{Z} : p \neq q \Rightarrow p \text{ y } q \text{ son coprimos}$$

4) Si m y n son números enteros pares cualesquiera, entonces $m + n$ también es un entero par.

Si $\mathbb{Z}$ denota al conjunto de los números enteros, esta proposición se puede escribir así:

$$\forall\, m \in \mathbb{Z} : \forall\, n \in \mathbb{Z} : \text{ si } m \text{ y } n \text{ son pares } \Rightarrow m + n \text{ es un entero par.}$$

También se puede escribir así

$$\forall\, m \in \mathbb{P} : \forall\, n \in \mathbb{P} : m + n \in \mathbb{P},$$

Si $\mathbb{P}$ representa al conjunto de los enteros pares.

Algunos autores, en vez de usar dos cuantificadores universales hubieran preferido escribir la proposición así:

$$\forall\, m,\, n \in \mathbb{Z} : \text{ si } m \text{ y } n \text{ son pares } \Rightarrow m + n \text{ es un entero par}$$

o de este modo

$$\forall\, m, n \in \mathbb{P} : m + n \in \mathbb{P}$$

5) Dado cualquier número real, siempre existe un número entero mayor que él .

Si $\mathbb{R}$ representa al conjunto de números reales y $\mathbb{Z}$ al de los enteros, podemos escribir esta proposición del modo siguiente:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{Z} : \ n \text{ es mayor que } x.$$

6) Todo número natural es mayor que cero.

Esta proposición se puede escribir en forma simbólica de dos modos diferentes, según sea el conjunto universal seleccionado:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{N} \Rightarrow x > 0$$

O bien

$$\forall\, x \in \mathbb{N} : x > 0$$

Donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales y el símbolo "$>$" significa "mayor que".

Como se vió, para negar una proposición, es suficiente anteponer la frase: "es falso que". Lo mismo es válido para el tipo de proposiciones que estamos estudiando. Así por ejemplo:

Todo número natural es mayor que cero.

Su negación

Es falso que: Todo número natural es mayor que cero

Sin embargo es útil tener formas equivalentes de estas proposiciones. Recordemos que siempre que

$$\forall\, x \in U : p(x)$$

es verdadera, significará que $p(a)$ es verdadera para cada elemento a de U, es decir, $\neg p(a)$ es falsa para todo elemento a de U, o sea que es falsa la proposición:

$$\exists\, x \in U : \neg p(x)$$

Ahora, si $\forall\, x \in U : p(x)$ es falsa, tenemos que para algún a en U, $p(a)$ es falsa, es decir, para este a, $\neg p(a)$ es verdadera, así que la proposición

$$\exists\, x \in U : \neg p(x)$$

es verdadera.

Ejemplifiquemos lo anterior. Sea

$$U = \{11, 12, 13, 14\}$$

y consideremos la proposición

$$\forall\, x \in U : x \text{ es divisible por } 2$$

Hagamos una lista de los valores de verdad de la frase abierta para cada uno de los elementos de U.

11 es divisible por 2 — F
12 es divisible por 2 — V
13 es divisible por 2 — F
14 es divisible por 2 — V

Vemos que la proposición es falsa, así que de antemano sabremos que la proposción

$$\exists\, x \in U :\ \neg(x \text{ es divisible por } 2)$$

es verdadera.

Podemos entonces concluir en general que:

$$\neg(\forall\, x \in U : p(x)) \text{ es equivalente a } \exists\, x \in U : \neg p(x)$$

Ahora, si $\exists\, x \in U : \neg p(x)$ es falsa, significa que $p(a)$ es falsa para cualquier a en U, de aquí que $\neg p(a)$ es verdadera para cualquier a en U. Por lo tanto:

$$\forall\, x \in U : \neg p(x)$$

es verdadera.

Si sabemos que $\exists\, x \in U : \neg p(x)$ es verdadera, esto significa que para algún a en U, $p(a)$ es verdadera, así que $\neg p(a)$ es falsa para este mismo a en U, y podemos concluir que

$$\forall\, x \in U : \neg p(x)$$

es falsa.

Entonces podemos asentar que:

$$\neg(\exists\, x \in U : \neg p(x)) \text{ es equivalente a } \forall\, x \in U : \neg p(x).$$

Ejemplos: En los siguientes ejemplos comentaremos algunos tipos de proposiciones en las que el cuantificador no esta explícito.

1. Ningún número al cuadrado es negativo

   Esta proposición se puede escribir de la siguiente forma:

   "No existe número que, elevado al cuadrado sea negativo".

   O también:

   "Todo número cumple que, elevado al cuadrado, no es negativo".

   De forma esquemática podemos decir que si una proposición tiene la forma:

   $$\text{"Ningún } x \in U \text{ cumple } p(x)\text{"}$$

   ésta, en realidad, es la proposición universal

   $$\text{"}\forall\, x \in U : \neg p(x)\text{"}$$

   .

   Así, nuestro ejemplo se escribe en forma esquemática como:

   $$\forall\, x \in \mathbb{R} : \neg(x^2 < 0),$$

   donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales y "$<$" se lee como "es menor que"

2. Ningún triángulo equilátero tiene ángulos interiores menores de 60 grados.

   En este ejemplo, una rápida inspección nos lleva a la siguiente forma esquemática:

   $$\forall\, x \in T : x \text{ no tiene ángulos menores de 60 grados,}$$

   donde T es el conjunto de triángulos equiláteros.

3. Un número par es divisible por 2.

   Aquí no está explícito el cuantificador, pero si escribimos la proposición en la forma siguiente:

"Para todo número se cumple que si él es par, entonces es divisible por 2"

nos queda claro que una forma esquemática de escribirla sería

$$\forall\, n \in \mathbb{Z} : n \text{ par } \Rightarrow n \text{ es divisible por } 2$$

4. Una función derivable es continua.

   La proposición la podemos escribir de la siguiente forma:

$$\forall\, f \in D : f \text{ es continua}$$

   donde D es el conjunto de las funciones que son derivables, pero si $\mathfrak{F}$ es el conjunto de funciones, entonces la proposición puede escribirse como:

$$\forall\, f \in \mathfrak{F} : f \text{ derivable } \Rightarrow f \text{ es continua}$$

5. Es falso que: para todo número exista un entero mayor que él.

   Aprovechemos lo que comentamos en el ejemplo 5, página 17 para escribir la proposición de la forma:

$$\neg(\forall\, x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{Z} : n > x)$$

   es decir,

$$\exists x \in \mathbb{R} : \neg(\exists n \in \mathbb{Z} : n > x)$$

   simplificando más:

$$\exists x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{Z} : \neg(n > x)$$

Ahora veamos otros ejemplos de negaciones:

6. "Es falso que exista algún funcionario que no es corrupto"
   es equivalente a
   "Todos los funcionarios son corruptos".

   Invitamos al estudiante a hacer todos los cálculos con estas dos proposiciones: Pasarlas a sus formas simbólicas, calcular sus valores de verdad y convencerse de la equivalencia.

7. $\neg(\forall\, n \in \mathbb{P} : \forall\, m \in \mathbb{P} : n + m \in \mathbb{P})$ es equivalente a:

$$\exists\, n \in \mathbb{P} : \neg(\forall\, m \in \mathbb{P} : n + m \in \mathbb{P})$$

   que a su vez es equivalente a:

$$\exists\, n \in \mathbb{P} : \exists\, m \in \mathbb{P} : n + m \notin \mathbb{P}$$

   Convénzase el lector de estas equivalencias, por favor.

8. $$\neg(\forall\, x \in \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{Z} : n \text{ es mayor que } x)$$

   es equivalente a:

$$\exists\, x \in \mathbb{R} : \neg(\exists\, n \in \mathbb{Z} : n \text{ es mayor que } x)$$

   que a su vez es equivalente a :

$$\exists\, x \in \mathbb{R} : \forall\, n \in \mathbb{Z} : \neg(n \text{ es mayor que } x)$$

   ¿Verdad?

Ejercicios 3.

1. Determine cuáles de las siguientes proposiciones son del tipo

$$\forall\, x \in U : p(x) \quad \text{o} \quad \exists\, x \in U : p(x),$$

   precisando el conjunto universal y la proposición abierta $p(x)$, y expréselas simbólicamente.

   a) Cualquier día es bueno para estudiar.

b) Cada comerciante pretende sacar ganancia de la crisis.

c) Cualquier hombre, si trabaja, se agota.

d) Todo triángulo que tiene sus tres lados iguales es equilátero.

e) Algún triángulo puede ser equilátero y no tener los 3 lados iguales.

f) Cada par de rectas, sin son paralelas, no se intersectan.

g) Pueden haber dos rectas no paralelas que se corten en más de un punto.

h) Ningún hombre vive más de 150 años.

i) Algunos números naturales son positivos.

j) Hay un punto en el plano tal que cualquier recta pasa por él.

k) Para cualquier número positivo, hay un natural que es mayor que él.

l) Todos los números reales cumplen que su cuadrado es positivo.

m) Nunca sucede que el cuadrado de un entero sea $1/3$.

2. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) Todo estudiante de esta facultad nació en Puebla.

b) Cada vez que sumamos dos números impares se obtiene un número impar.

c) Todo entero es par y primo.

d) Si un número es par entonces es igual a 1.

e) Si un número es par, al sumarle uno "se vuelve" impar.

f) Si $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $\forall\, x \in U : x$ es impar

g) Si U es como en (f), $\forall\, x \in U : x$ es mayor que 0 pero menor que 11.

h) si U es como en (g), $\exists\, x \in U : x$ es mayor que 11.

i) si U es como en (h), $\exists\, x \in U : x$ múltiplo de 2.

3. ¿Cuáles de los siguientes pares de proposiciones son equivalentes?

a) Todas las personas oyen consejo, o no llegan a viejos.
Cada persona que oye consejo llega a viejo.

b) $\forall\, x \in \mathbb{Z} :\ x^2 \neq 1 \ \Rightarrow\ x^2 + 1 \neq 2$
$\neg(\exists\, x \in \mathbb{Z} :\ x^2 = 1 \ \Rightarrow\ x^2 + 1 = 2)$

c) $\exists\, x \in \mathbb{Z} :\ x^2 = 1 \ \wedge\ x^2 + 1 \neq 2$
$\neg(\forall\, x \in \mathbb{Z} :\ x^2 = 1 \ \Rightarrow\ x^2 + 1 = 2)$

d) $\forall\, x \in \mathbb{Z} :\ x^2 = 1 \ \wedge\ x^2 \neq 0$
$\forall\, x \in \mathbb{Z} :$ es falso que: $x^2 = 1 \ \Rightarrow\ x^2 = 0$

Nota: Recuerde que $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros, o sea:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

4. Diga si en las siguientes parejas de proposiciones, son una la negación de la otra.

   a) Todas las funciones contínuas son integrales.
   Todas las funciones contínuas no son integrales.

   b) Hay algún número primo que no es par.
   Hay algún número primo que es par.

   c) Todos los seres vivos están en peligro de morir.
   Algún ser vivo no tiene el peligro de morir.

   d) Para cada número positivo, hay un número natural mayor que él.
   Hay un número positivo, tal que todo número natural es menor o igual que él.

§5

1.5. Razonamiento

En el lenguaje que cotidianamente empleamos, suele usarse la palabra **Razonamiento** para indicar una actividad o proceso del pensamiento en

el que se exponen razones sobre las que se basa la veracidad o falsedad de una proposición.

En un razonamiento, la conlusión es la proposición sobre la que se afirma su veracidad o falsedad, basándose en las otras proposiciones del razonamiento que son las premisas. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Todos los animales son mortales}\\ \text{Todos los hombres son animales}\end{array}\right\}\ \text{Premisas}$$
$$\text{Por lo tanto: Todos los hombres son mortales}\ \}\ \text{conclusión}$$

Como hemos dicho, en un razonamiento se pretende que de las premisas se pueda concluir con seguridad algo. en este sentido puede hablarse de razonamientos mal hechos, si de las premisas no se puede seguir la conclusión. Antes de proseguir, notemos que un razonamiento adopta la forma de una implicación, así que:

Definición 1.5.1 Un **razonamiento** es una implicación en donde el antecedente es una conjunción de un número finito de proposiciones, llamadas **premisas del razonamiento**; el consecuente es llamado **la conclusión del razonamiento**. Lógicamente un razonamiento es una implicación de la forma:

$$\underbrace{(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n)}_{\text{Premisas}} \Rightarrow \underbrace{r}_{\text{Conclusión}}$$

que suele también escribirse del modo siguiente:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline r \end{array}$$

Ejemplos:

1) Si Jaime deja de comer pan, adelgazará.
Jaime no ha adelgazado

Jaime no ha dejado de comer pan.

2) Alonso habló mal de Reagan.
Reagan es anticomunista

Alonso es comunista.

3) Toda Águila vuela.
Guillermo no es águila.

Guillermo no vuela.

4) Corro o como.
Si corro me canso.
Si como me canso.

Me canso.

Observemos los razonamientos 2) y 3). En 2), las premisas pueden ser verdaderas y sin embargo la cunclusión es falsa. En este caso, la veracidad de las premisas no asegura la veracidad de la conclusión.

En 3), las premisas y la conclusión pueden ser verdaderas y sin embargo, la forma de razonamiento no es "correcta", ya que podemos establecer un razonamiento de igual forma que puede tener premisas verdaderas y conclusión falsa, por ejemplo:

5) Todos los perros son mamíferos
Pedro no es perro.

Pedro no es mamífero.

3) y 5) tienen la forma

6) $\forall\, x \in U: \quad p(x)$
a no es elemento de U.

$\neg p(a)$

En 5) tenemos premisas verdaderas y conclusión falsa; además podemos asegurar que todos los razonamientos escritos en la forma 6) son incorrectos (que no es lo mismo que falsos).

Ahora observemos 1) y 4). 1) acepta la siguiente forma simbólica:

7)
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$
p: Jaime dejó de comer.
q: Jaime ha adelgazado.

No importan cómo sean p y q, si las premisas son verdaderas, la conclusión es verdadera. No puede suceder que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa ¿por qué?. En todo razonamiento de la forma 7), si aseguramos la veracidad de las premisas, aseguramos la veracidad de la conclusión. Podemos decir que todo razonamiento de esta forma es "correcto".

4) acepta la siguiente forma simbólica:

8)
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \Rightarrow r \\ \underline{p \Rightarrow r} \\ r \end{array}$$
p: Yo corro.
p: Yo como.
p: Yo me canso.

Análogo al caso anterior verificamos que no importa como sean p, q y r, si las premisas son verdaderas, la conclusión es verdadera.

Analicemos con más cuidado este ejemplo: Aceptemos que $p \vee q$, $p \Rightarrow r$ y $q \Rightarrow r$ son verdaderas; puede suceder que p sea verdadera y q falsa. Como $p \Rightarrow r$ es verdadera y p verdadera, aseguramos que r es verdadera. Si q es verdadera y p falsa, el razonamiento es el mismo, y es fácil convencerse de que r es verdadera cuando p y q son verdaderas. Notar que el caso en que p y q son falsas, no sucede. Así que 8) es otra forma "correcta" de razonamiento. Después de esta presentación tenemos la siguiente:

Definición 1.5.2 Sean $P_1, P_2, \cdots, P_n$ las premisas de un razonamiento y p su conclusión. El razonamiento es **correcto** o **válido** si

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n) \Rightarrow p$$

es tautología.

Ejemplos:

1. Si un razonamiento es de la forma

$$\begin{array}{lll} P_1: & \forall\, x \in U: & (p(x) \Rightarrow q(x)) \\ P_2: & \forall\, x \in U: & (q(x) \Rightarrow r(x)) \\ \hline p \;: & \forall\, x \in U: & (p(x) \Rightarrow r(x)) \end{array}$$

El razonamiento es válido, ya que si P_1 y P_2 son verdaderas y p falsa, tendríamos $a \in U$ tal que $p(a) \Rightarrow r(a)$ es falsa, o sea $p(a)$ verdadero y $r(a)$ falso; pero $q(a) \Rightarrow r(a)$ debe ser verdadera y como $r(a)$ es falsa, esto sólo puede ser si $q(a)$ es falsa, pero como $p(a) \Rightarrow q(a)$ es verdadera, $p(a)$ resulta falsa, que no es lo que teníamos antes, así que resulta imposible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.

2. El razonamiento:

$$\begin{array}{ll} P_1: & \text{Todos los tiburones son cuadrúpedos.} \\ \underline{P_2}: & \underline{\text{Todos los cuadrúpedos tienen alas.}} \\ p \;: & \text{Todos los tiburones tienen alas.} \end{array}$$

El razonamiento es correcto aunque las premisas y la conclusión sean falsas. Es un razonamiento de la forma del ejemplo anterior. Para comprobarlo bastará tomar a:

$$U = \text{ conjunto de animales.}$$

$$\begin{array}{ll} p(x): & x \text{ es tiburón.} \\ q(x): & x \text{ es cuadrúpedo.} \\ r(x): & x \text{ tiene alas.} \end{array}$$

En general, si tenemos una forma de razonamiento correcto, por ejemplo:

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ p \Rightarrow r \\ q \Rightarrow r \end{array}}{r}$$

Podemos colocar cuantificadores universales de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} P_1: & \forall\, x \in U: & (p(x) \vee q(x)) \\ P_2: & \forall\, x \in U: & (p(x) \Rightarrow r(x)) \\ P_3: & \forall\, x \in U: & (q(x) \Rightarrow r(x)) \\ \hline p: & \forall\, x \in U: & r(x) \end{array}$$

Y obtener otra forma de razonamiento correcto. El argumento que justifica la validez de esta forma de razonamiento es análogo al caso anteriormente comentado. Veamos: si p es falsa y P_1, P_2 y P_3 verdaderas, entonces existe $a \in U$, tal que $r(a)$ es falso, y como $p(a) \Rightarrow r(a)$ es verdadera, podemos concluir que $p(a)$ es falsa; de manera análoga , como $q(a) \Rightarrow r(a)$ es verdadera, entonces también $q(a)$ es falsa, es decir, $(p(a) \vee q(a))$ es falsa, contradiciendo el hecho de que P_1 es verdadera.

En este tipo de proceso, observemos que el cuantificador en cada una de las premisas y conclusión es el cuantificador universal; análogamente, el conjunto universo, en premisas y conclusión es el mismo, y las proposiciones abiertas que aparecen en las premisas y conclusión están relacionadas en tal forma que constituyen un razonamiento correcto.

¡Atención! Observemos la siguiente forma de razonamiento:

$$\begin{array}{lll} P_1: & \forall\, x \in U: & (p(x) \vee q(x)) \\ P_2: & \forall\, x \in U: & (p(x) \Rightarrow r(x)) \\ P_3: & \forall\, x \in U: & (q(x) \Rightarrow r(x)) \\ \hline p: & \exists\, x \in V: & r(x) \end{array}$$

Esta es una forma de razonamiento incorrecta, ya que permite construir un razonamiento con esta forma pero con premisas verdaderas y conclusión falsa. Si tomamos:

$$U = \{2, 4\}, \quad V = \{1\}$$

$$\begin{array}{ll} p(x): & x \text{ es par.} \\ q(x): & x < 0 \\ r(x): & x = 2 \vee x = 4 \end{array}$$

Se puede comprobar que $(\forall\, x \in U: \quad (p(x) \vee q(x)))$, $(\forall\, x \in U: \quad (p(x) \Rightarrow r(x)))$ y $(\forall\, x \in U: \quad (q(x) \Rightarrow r(x)))$ son verdaderas y sin embargo $(\exists\, x \in V: \quad r(x))$ es falsa.

Así que la validez de un razonamiento, no garantiza la veracidad de una conclusión, pero, cuando el razonamiento es válido, la veracidad de la conclusión sólo se garantiza si las premisas son verdaderas. Si queremos demostrar que una proposición es verdadera sabiendo que otras ya lo son, podremos hacerlo colocando a la proposición cuya veracidad se va a probar, como conclusión y las proposiciones que se saben verdaderas, como premisas de un razonamiento válido. Por eso a las formas de los razonamientos válidos, suelen llamárseles **reglas de inferencia**.

Ejercicios 4.

1. Dadas la siguientes premisas, trate de obtener conclusiones correctas:

   a) Si compro un coche nuevo, tendré que hacer pagos.
   Compré un coche nuevo.
   ———————————————

   b) Ningún cuadrúpedo sabe volar.
   Los gatos son cuadrúpedos.
   ———————————————

   c) Si salgo de mi casa iré al cine.
   No fuí al cine
   ———————————————

   d) Si Horacio come a deshoras, engordará.
   Horacio no ha engordado.
   ———————————————

   e) Si no fumo no tendré cáncer.
   Si no tengo cáncer, soy feliz.
   Soy infeliz.
   ———————————————

2. Probar que las siguientes formas de razonamiento son reglas de inferencia:

   (a) $\dfrac{\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \end{array}}{p \Rightarrow r}$ (b) $\dfrac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \end{array}}{q}$ (c) $\dfrac{\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \Rightarrow \neg q \end{array}}{\neg p}$

(d) $\dfrac{p \quad p \Rightarrow p_1 \quad p_1 \Rightarrow p_2}{p_2}$

(e) $\dfrac{\forall x \in \cup : p(x) \quad a \in \cup}{p(a)}$

(f) $\dfrac{p \quad p \Rightarrow q}{p \Rightarrow q \vee r}$

(g) $\dfrac{p \Rightarrow r \quad q \Rightarrow r}{p \vee q \Rightarrow r}$

(h) $\dfrac{p \vee q \quad p \Rightarrow r \quad q \Rightarrow r}{r}$

(i) $\dfrac{r \quad p \wedge \neg p}{s}$

(j) $\dfrac{r \quad s}{p \vee \neg p}$

(k) $\dfrac{p \wedge \neg q \quad p \wedge \neg q \Rightarrow r \quad r \Rightarrow (s \wedge \neg s)}{p \Rightarrow q}$

(l) $\dfrac{r \quad r \Rightarrow p \wedge q}{r \Rightarrow p}$

(m) $\dfrac{\neg p \Rightarrow r \quad r \Rightarrow s \wedge \neg s}{p}$

(n) $\dfrac{\exists x \in U : p(x) \quad \exists x \in U : q(x)}{\exists x \in U : p(x) \vee q(x)}$

(0) $\dfrac{\forall x \in U : \neg p(x) \Rightarrow r(x) \quad \forall x \in U : r(x) \Rightarrow s(x) \wedge \neg s(x)}{\forall x \in U : p(x)}$

(p) $\dfrac{\forall x \in U : p(x) \quad \forall x \in U : q(x)}{\forall x \in U : p(x) \vee q(x)}$

(l2) $\dfrac{\forall x \in U : \neg p(x) \Rightarrow r(x) \quad \forall x \in U : r(x) \Rightarrow s(x) \wedge \neg s(x)}{\exists x \in U : p(x)}$

(m2) $\dfrac{\forall x \in U : p(x) \quad \forall x \in U : q(x)}{\exists x \in U : p(x) \vee q(x)}$

3. Averigüe si son reglas de inferencia las siguientes formas:

(a) $\dfrac{p \Rightarrow q \quad q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$

(b) $\dfrac{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \quad p}{p \vee q}$

(c) $\dfrac{p \Rightarrow q}{\neg p \Rightarrow \neg r}$

(d) $\dfrac{p \Rightarrow q}{\neg r \Rightarrow \neg q}$

(e) $\dfrac{p \Rightarrow q}{\neg p \Rightarrow \neg q}$

$$r \Rightarrow p \qquad \neg r \Rightarrow \neg p \qquad \frac{p \wedge \neg r}{s}$$

(f) $\dfrac{\exists\, x \in U : p(x) \quad \exists\, x \in U : p(x)}{\exists\, x \in U : p(x) \wedge q(x)}$

(g) $\dfrac{\forall\, x \in U : p(x) \Rightarrow q(x) \quad p(a)}{q(a)}$

(0) $\dfrac{\exists\, x \in U : \neg p(x) \Rightarrow r(x) \quad \forall\, x \in U : r(x) \Rightarrow s(x) \wedge \neg s(x)}{\exists\, x \in V : p(x)}$

(p) $\dfrac{\exists\, x \in U : p(x) \quad \exists x \in V : q(x)}{\exists\, x \in U : p(x) \vee q(x)}$

§6

1.6. Métodos de Demostración

Históricamente el hombre ha tenido la necesidad de comprobar que ciertas afirmaciones son verdaderas o falsas:

¿Es la Tierra el centro del Universo?
¿Está toda la materia formada por partículas elementales?
¿Comen los leones carne de venado?
¿La suma de los ángulos de todo triángulo es igual a 180º?
¿Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 \geq 0$?
¿Es José Pérez hijo de Juan Pérez?

Para responder a estas interrogantes, el hombre tuvo primero que conocer el valor de verdad de otras proposiciones para, a partir de ellas, "deducir" el valor de verdad de las proposiciones originalmente planteadas. De esta manera, para concluir que "la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a 180º" es una proposición verdadera en la Geometría Euclideana, hubo necesidad de aceptar y conocer como verdadera que "dos rectas paralelas que son cortadas por una transversal, forman ángulos alternos internos iguales". A su vez, para aceptar la veracidad de esta proposición, fue necesario aceptar como verdadera "por

un punto P fuera de la recta l, pasa una y sólo una recta paralela a l".

En este proceso de probar la veracidad de una proposición a partir de otras cuya veracidad era conocida, el hombre descubrió que había un momento en que no era posible comprobar la veracidad de cierto tipo de proposiciones y por esta razón algunas de ellas las aceptó como verdaderas. A este tipo de proposiciones se les denomina **axiomas**, mientras que a las proposicones verdaderas que son deducidas a partir de proposiciones cuya veracidad es conocida o aceptada, se les denomina **Teoremas**.

Uno de los objetivos de este texto es iniciar al lector en la lectura y escritura de matemáticas. Esto requiere no solo del vocabulario sino también de sintaxis, es decir, se necesita comprender y aprender a ligar proposiciones que lleve a formar ese ente matemático conocido como demostración.

Una demostración de la veracidad de una proposición p es un razonamiento válido donde las premisas del razonamiento pueden ser

(1) definiciones, o
(2) axiomas, o
(3) proposiciones cuya veracidad ya se ha establecido, o
(4) proposiciones que se puedan implicar de (1), (2) o (3);

La conclusión del razonamiento será la proposición p. **¡Atención!:** una demostración depende esencialmente de los razonamientos válidos y los axiomas aceptados. Por esta razón, si alguna de las dos cosas cambia, cosa que algunas veces sucede, la demostración puede resultar errónea.

Ahora bien, los teoremas matemáticos y sus demostraciones no ocurren de manera aislada; siempre están situados en el contexto de algún sistema matemático. Por ejemplo, en la proposición

Hay algún número primo que no es par

el contexto natural es el de los números enteros positivos, y en la proposición

si n es un número par, entonces n^2 es un número par

el contexto será el conjunto de todos los enteros

Con mucho frecuencia, un teorema no hace referencia explícita al sistema matemático en donde se está probando; normalmente éste se implica del contexto y usualmente no causa dificultad, pero si existe la mínima posibilidad de ambigüedad debemos ser cuidadosos de nombrar explícitamente el sistema que estamos considerando.

Cuando se construye una demostración, el uso y el orden en que se deben usar (1), (2), (3) y (4) no tiene por qué ser obvio; hacerlo requiere no sólo de conocimiento, sino de experiencia, perseverancia, intuición, y algunas veces, de una buena dosis de suerte.

En seguida listaremos algunos tipos de demostración en los que resaltaremos cómo y cuáles son los razonamientos válidos que se usaron. **Esta pequeña lista no pretende agotar todas las posibles formas demostrar, sino más bien sólo describir algunas de las más conocidas y aceptadas.**

1.6.1. Demostraciones directas.

Tenemos el siguiente problema: Dada una proposición t; queremos demostrar que es verdadera.Una demostración directa de la proposición t consistirá en **construir un razonamiento válido donde t sea la conclusión y todas sus premisas verdaderas, y así podremos concluir que t será verdadera.**

Ejemplos:

1. Demostremos la proposición

   $t:$ Si n es un entero par entonces n^2 es un entero par.

   Sea U el conjunto de todos los enteros. Si $p(x)$ es la proposición abierta: "si x es un entero par x^2 es entero par", queda:

   $$t: \quad \forall\, x \in U: \quad p(x)$$

   Para demostrar que es verdadera, hay que demostrar, que para $n_0 \in U,\ p(n_0)$ es una proposición verdadera. Si $n_0 \in U,\ p$ es: "n_0 es un entero par" y q es "n_0^2 es un entero par", se puede construir el

siguiente razonamiento, donde las premisas se sabe de antemano que son verdaderas:

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow p_1 & : \text{Si } n_0 \text{ es un entero par, entonces } n_0 = 2m \text{ para algún entero } m. \\ p_1 \Rightarrow p_2 & : \text{Si } n_0 = 2m \text{ para algún entero } m \text{ entonces } n_0^2 = (2m)^2 \text{ para el entero } m. \\ p_2 \Rightarrow p_3 & : \text{Si } n_0^2 = (2m)^2 \text{ para } m \text{ entero, entonces } n_0^2 = (2m) \text{ y } 2m^2 \text{ es entero.} \\ \underline{p_3 \Rightarrow q} & : \underline{\text{Si } n_0^2 = 2(2m^2) y 2m^2 \text{ es entero } n_0^2 \text{ es un entero par.}} \\ p \Rightarrow q & : \text{Si } n_0 \text{ es un entero par, entonces } n_0^2 \text{ es un entero par.} \end{array}$$

donde:

$$\begin{array}{l} p_1 : n_0 = 2m \text{ para algún entero } m. \\ p_2 : n_0^2 = (2m)^2 \text{ para algún entero } m. \\ p_3 : n_0^2 = 2(2m^2) \text{ y } 2m^2 \text{ es entero.} \end{array}$$

Este razonamiento es de la forma:

$$[(p \Rightarrow p_1) \wedge (p_1 \Rightarrow p_2) \wedge (p_2 \Rightarrow p_3) \wedge (p_3 \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

Esto justifica que $p \Rightarrow q$ es verdadera y por tanto t es verdadera.

Nota: Tanto las proposiciones que hemos aceptado en el ejemplo como verdaderas, así como las que usaremos en los ejemplos siguientes, se demostrarán o se aclarará si son axiomas en el capítulo de números reales.

2. Demostraremos ahora la proposición:

$$t : \quad 1 > 0$$

para hacerlo directamente construímos el siguiente razonamiento válido:

$$\begin{array}{rcl} p & : & 1 \neq 0 \wedge 1^2 = 1 \wedge [\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0] \\ p \Rightarrow p_1 & : & 1 \neq 0 \wedge 1^2 = 1 \wedge [\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0] \Rightarrow 1 \neq 0 \wedge 1^2 = 1 \wedge 1^2 \geq 0 \\ p_1 \Rightarrow p_2 & : & 1 \neq 0 \wedge 1^2 = 1 \wedge 1^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \neq 0 \wedge 1 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \underline{p_2 \Rightarrow t} & : & \underline{1 \neq 0 \wedge 1 \geq 0 \Rightarrow 1 > 0} \\ t & : & 1 > 0 \end{array}$$

donde p_1 es: $1 \neq 0 \wedge 1^2 = 1 \wedge 1^2 \geq 0$, y p_2 es: $1 \neq 0 \wedge 1 \geq 0$.

Este razonamiento es válido y como las premisas son verdaderas, podemos concluir que t es verdadera.

Es conveniente advertir que en la literatura matemática suelen estar escritas las demostraciones de manera más concisa, sin explicar el o los razonamientos usados. Por ejemplo, el ejemplo 1 podría estar escrito así:

n_0 es un entero par $\Rightarrow n_0 = 2m$ para algún entero $m \Rightarrow n_0^2 = (2m)^2$ para el entero $m \Rightarrow n_0^2 = 2(2m^2)$ y $2m^2$ es entero $\Rightarrow n_0^2$ es entero par.

Con la práctica el alumno podrá reconocer los razonamientos involucrados en las demostraciones, así como proponer los razonamientos adecuados para la feliz realización de su demostración.

3. Demostremos:

$$t: \quad \forall\, x \in \mathbb{R}:\ x > 0 \Rightarrow x + 1 > 0.$$

Para esto probaremos que para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > 0 \Rightarrow x_0 + 1 > 0$ es verdadera.

El siguiente razonamiento es válido

$$\begin{array}{lll} p & : & x_0 > 0 \\ p \Rightarrow p_1 & : & x_0 > 0 \Rightarrow x_0 + 1 > 1 \wedge 1 > 0 \\ \underline{p_1 \Rightarrow q} & : & \underline{x_0 + 1 > 1 \wedge 1 > 0 \Rightarrow x_0 + 1 > 0} \\ q & : & x_o + 1 > 0 \end{array}$$

Obsérvese que la premisa p puede no ser verdadera, pero si se supone que es verdadera, como las restantes premisas, son verdaderas y el

razonamiento es válido, q resultaría verdadera. Si p es falsa, con este razonamiento no aseguramos que q sea verdadera pero $p \Rightarrow q$ es verdadera.

En general, para demostrar que una proposición del tipo $p \Rightarrow q$ es verdadera, bastará construir un razonamiento del tipo

$$\begin{array}{c} p \\ p \Rightarrow p_1 \\ p_1 \Rightarrow p_2 \\ \vdots \\ \underline{p_n \Rightarrow q} \\ q \end{array}$$

donde todas las premisas, excepto quizá p, son verdaderas.

1.6.2. Demostraciones indirectas.

Si se logra demostrar **que una *proposición* equivalente a t es verdadera, se demuestra indirectamente que t es verdadera.**

Por ejemplo, puede demostrarse indirectamente que una proposición de la forma $p \Rightarrow q$, demostrando su contrarrecíproca $\neg q \Rightarrow \neg p$. Este método se llama método de demostración **por contraposición**.

Otra forma indirecta de demostrar es la siguiente: dada una proposición t, **si demostramos que $\neg t$ es falsa, indirectamente demostramos que t es verdadera.**

Demostrar que $\neg t$ es falsa se puede hacer de la siguiente forma: demostremos que una proposición de la forma

$$\neg t \Rightarrow s$$

es verdadera y s se asegura que es falsa (por ejemplo si s es una contradicción [1]), esto justificará que t es verdadera. Esta manera de demostrar se conoce como **reducción al absurdo** o **por contradicción".**

Ejemplos:

[1] Una contradicción es una proposición falsa por su forma lógica.

1. Demostremos por contradicción la proposición

$$t: \quad 1 > 0$$

Para ello demostremos una proposición de la forma:

$$\neg(1 > 0) \Rightarrow s, \qquad \text{donde } s \text{ es falsa, es decir:}$$

$$(1 < 0 \ \text{ o } \ 1 = 0) \Rightarrow s, \qquad \text{donde } s \text{ es falsa.}$$

He aquí el razonamiento construído en esta ocasión:

$$\begin{array}{lll}
\neg t \Rightarrow p_1: & & 1 = 0 \text{ o } 1 < 0 \Rightarrow 1 < 0 \\
p_1 \Rightarrow p_2: & & 1 < 0 \Rightarrow 1 < 0 y 0 < -1 \\
p_2 \Rightarrow p_3: & & 1 < 0 \text{ y } 0 < -1 \Rightarrow 1(-1) < 0(-1) \text{ y } 0 < -1 \\
\underline{p_3 \Rightarrow s}: & & 1(-n < 0(-1) \text{ y } 0 < -1 \Rightarrow -1 < 0 \text{ y } 0 < -1 \\
\hline
\neg t \Rightarrow s: & & 1 = 0 \text{ o } 1 < 0 \Rightarrow -1 < 0 \text{ y } 0 < -1
\end{array}$$

s es la proposición $-1 < 0$ y $0 < -1$ que es falsa.

2. Ahora demostraremos la proposición

$$t: \quad \forall\, a \in \mathbb{R},\ a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$$

Sea $a \in \mathbb{R}$. Demostremos por contradicción que:

$$p: \quad a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$$

es verdadera. Para esto, demostremos que $\neg p \Rightarrow s$, donde s es falsa.
He aquí la prueba:

$$\begin{array}{lll}
\neg p \ \Rightarrow p_1: & & a > 0 \ \wedge \ a^{-1} \leq 0 \Rightarrow a^{-1}a \leq 0.a \\
p_1 \Rightarrow p_2: & & a^{-1}a \leq 0 \cdot a \qquad \Rightarrow 1 \leq 0 \\
\underline{p_2 \Rightarrow s}: & & 1 \leq 0 \qquad\quad \Rightarrow 1 \leq 0 \ \wedge \ 1 > 0 \\
\hline
\neg p \Rightarrow s: & & a > 0 \ \wedge \ a^{-1} \leq 0 \Rightarrow 1 \leq 0 \ \wedge \ 1 > 0
\end{array}$$

Aquí s es la proposición falsa: $1 \leq 0 \wedge 1 > 0$

3. Demostraremos la proposición

$$t: \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}: \ n^2 \text{ es impar } \Rightarrow n \text{ es impar.}$$

Sea $n_0 \in \mathbb{Z}$. Probemos por contraposición que la implicación:

$$n_0^2 \text{ es impar } \Rightarrow n_0 \text{ es impar}$$

es verdadera.

Esta proposición es de la forma $r \Rightarrow s$, donde r es: "n_0^2 es impar" y s es "n_0 es impar". La contrarrecíproca es:

$$n_0 \text{ no es impar } \Rightarrow n_0^2 \text{ no es impar}$$

es decir:

$$n_0 \text{ es par } \Rightarrow n_0^2 \text{ es par}$$

La demostración de esta última proposición se hizo ya. (ver ejemplo 1 página 34).

4. Ahora demostraremos la proposición

$$t: \quad \forall\, a \in \mathbb{R}: \quad a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$$

de forma distinta a la realizada en el ejemplo 2.

Sean $a \in \mathbb{R}$. Demostraremos que $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$ es verdadera. La contrarrecíproca de esta proposición es:

$$\frac{1}{a} \leq 0 \Rightarrow a \leq 0$$

una demostración de dicha contrarrecíproca es:

$$\begin{array}{rcl}
a^{-1} \leq 0 & \Rightarrow & a^{-1} < 0 \quad \text{y} \quad a^2 \geq 0 \\
a^{-1} < 0 \quad \text{y} \quad a^2 \geq 0 & \Rightarrow & a^2 a^{-1} < a^2 \cdot 0 \\
a^2 a^{-1} \leq a^2 \cdot 0 & \Rightarrow & a \leq 0 \\
\hline
a^{-1} \leq 0 & \Rightarrow & a \leq 0
\end{array}$$

Puede demostrarse indirectamente que una proposición de la forma $(p \vee q) \Rightarrow r$ es verdadera, demostrando que la conjunción $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$ es verdadera ya que estas proposiciones son equivalentes. Por ejemplo, demostraremos que:

$$t: \quad \forall\, x \in \mathbb{R}: \quad x > 0 \vee x < 0 \Rightarrow x^2 > 0$$

Sea $a \in \mathbb{R}$. Probaremos que: $a > 0 \vee a < 0 \Rightarrow a^2 > 0$ es verdadera. Demostraremos que

$$\big[(a > 0 \Rightarrow a^2 > 0) \wedge (a < 0 \Rightarrow a^2 > 0)\big]$$

es verdadera. Los siguientes razonamientos demuestran que $(a > 0 \Rightarrow a^2 > 0)$ es verdadera y que $(a < 0 \Rightarrow a^2 > 0)$ es verdadera y por tanto, que su conjunción también es verdadera.

$$\begin{array}{c} a > 0 \\ a > 0 \Rightarrow a \cdot a > a \cdot 0 \\ \underline{a \cdot a > a \cdot 0 \Rightarrow a^2 > 0} \\ a^2 > 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} a < 0 \\ a < 0 \Rightarrow -a > 0 \\ -a > 0 \Rightarrow (-a)(-a) > (-a) \cdot 0 \\ \underline{(-a)(-a) > (-a) \cdot 0 \Rightarrow a^2 > 0} \\ a^2 > 0. \end{array}$$

1.6.3. Ejemplos y contraejemplos

A veces se requiere que una afirmación del tipo

$$\forall\, x \in U: \quad p(x)$$

es falsa. Para hacerlo basta probar que su negación,

$$\exists\, x \in U: \quad \neg p(x)$$

es verdadera. En otras palabras, para comprobar la falsedad de una proposición: $\forall\, x \in U:\ p(x)$, basta encontrar algún x_0, elemento de U, para el cual $p(x_0)$ es falsa.

A este método se le denomina demostración por **contraejemplo**.

Análogamente, si se requiere demostrar que una afirmación del tipo

$$\exists\, x \in U: \quad p(x)$$

es verdadera, bastará encontrar un elemento de x_0 de U tal que $p(x_0)$ es verdadera. Es decir, x_0 es un ejemplo que demuestra la proposición en cuestión. **¡Atención!:** con un ejemplo solo se pueden demostrar proposiciones existenciales, esto no vale para una proposición universal, con un ejemplo solo se logra aumentar nuestra sospecha de la veracidad de una proposición universal pero no su demostración.

Ejemplos:

1. Comprobaremos que la proposición

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad a^2 < 1$$

es falsa.

Veamos que existe un real x_0 tal que $x^2 < 1$ es falso. Si $x_0 = 1$, la proposición $x_0^2 < 1$ es falsa.

2. Para darnos cuenta que la proposición $\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad x + x = 3x$ es falsa, bastará observar que si $x_0 = 1$, la proposición $x_0 + x_0 = 3x_0$ es falsa.

Ejercicios 5.

1. Demuestre directamente que:

   a) $\forall\, x \in \mathbb{R}$: si $x > 5$ entonces $x > 3$.

   b) Si a y b son reales entonces $a = 0$ o $b = 0 \Rightarrow a \cdot b = 0$. (Use que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x \cdot 0 = 0$.)

   c) Si m y n son enteros impares, entonces $m + n$ es entero par.

   d) Si m y n son enteros impares, entonces mn es entero impar.

2. Demuestre por contraposición que:

   a) $a \cdot b \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ y $b \neq 0$, (a, $b \in \mathbb{R}$).

   b) $x^2 < 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$.

   c) Si mn es par entonces m es par o n es par (m, n enteros).

3. Demuestre por contradicción:

   a) Si x es racional y y es irracional, entonces $x + y$ es un número irracional.

   b) Si x es racional y y es irracional, entonces $x - y$ es un número irracional.

   (Para estos ejercicios use que la suma y resta de racionales es racional).

4. Demuestre por contraejemplo la falsedad de las siguientes proposiciones:

   a) Para cualesquiera enteros a, b, c, d con $b \neq 0$ y $d \neq 0$,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

   b) Para cualesquiera a, b reales positivos, $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

   c) Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = a$.

5. Demuestre las siguientes proposiciones:

   a) $(\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad x^2 + 6 = 10)$ es falsa.

   b) $(\forall\, x \in \{-2, 2\}, \quad x^2 + 6 = 10)$ es verdadera.

   c) $(\exists\, x \in \mathbb{R} : \quad x^2 + 6 = 0)$ es verdadera.

   d) $(\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad x > 2 \Rightarrow x^2 + 6 = 0)$ es falsa.

   e) $(\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad x^2 < 0 \Rightarrow x^2 + 6 = 10)$ es verdadera.

1.7. Apéndice 1

1. Consideremos el conectivo lógico "o". Se puede interpretar la proposición compuesta "p o q" de dos maneras:
   (a) "p o q o ambas".
   (b) "p o q, pero no ambas"
   La interpretación (a) la estudiamos suficientemente en el texto. Es el "o" inclusivo que denotamos con $\vee$.

   La interpretación de (b) es el **"o" exclusivo** denotado por $\underline{\vee}$. Aparece mucho en la vida cotidiana, como en la siguiente frase:

   "El sábado a las 6 de la tarde tengo dos opciones: o voy al partido de fútbol, o voy a la fiesta"

   Se entiende que no se pueden realizar las dos actividades.

   La tabla de verdad del "o" exclusivo sería, por supuesto,

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
F	V	V
V	F	V
F	F	F

   Una razón plausible para estudiar el "o" exclusivo es su uso en proposiciones como el axioma de tricotomía (Definición O1, del capítulo 3, página 75), aunque en dicho axioma se componen 3 proposiciones y no solamente 2.

   Quizá tendríamos que definir:

   Definición 1.7.1 Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son n proposiciones lógicas,

   $$p_1 \sqcup p_2 \sqcup \ldots \sqcup p_n$$

   es la proposición que es verdadera si y solo si exactamente una de las proposiciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ es verdadera.

Tres ejercicios inmediatos serían:

a) Demuestre que $p \sqcup q \equiv p \underline{\vee} q$

b) Pruebe que $p \sqcup q \sqcup r \neq p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r)$

c) Demuestre que $p \vee q \equiv (p \underline{\vee} q) \underline{\vee} (p \wedge q)$

Dadas las proposiciones p, q y r, demostrar que:

d) $p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r) \equiv (p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r$

e) $p \wedge (q \underline{\vee} r) \equiv (p \wedge q) \underline{\vee} (p \wedge r)$

f) $(q \underline{\vee} r) \wedge p \equiv (q \wedge p) \underline{\vee} (r \wedge p)$

g) $p \underline{\vee} (q \wedge r) \neq (p \underline{\vee} q) \wedge (p \underline{\vee} r)$

2. Entre los razonamientos válidos que podríamos estudiar, está el siguiente:

$$\frac{\begin{array}{l} P \sqcup Q \sqcup R \\ p \sqcup q \sqcup r \\ P \Rightarrow p \\ Q \Rightarrow q \\ R \Rightarrow r \end{array}}{(P \Rightarrow p) \wedge (Q \Rightarrow q) \wedge (R \Rightarrow r)}$$

Es un bonito ejemplo de un razonamiento en el que la demostración de su validez por medio de tablas de verdad es poco menos que imposible (¡2^6 renglones!), mientras que la demostración de su validez "razonando", como solemos hacer en matemáticas, es muy fácil.

3. El razonamiento válido anterior lo usó De Morgan en su "Lógica Forma" (1847), para deducir las proposiciones I.6 e I.19 de Euclides, a partir de las proposiciones I.5 e I.18, mucho más fácilmente que Euclides (Notación I.6, I.5, I.18 e I.19 son las proposiciones 6, 5, 18 y 19 del libro primero de los "Elementos" de Euclides). Ahi les va:

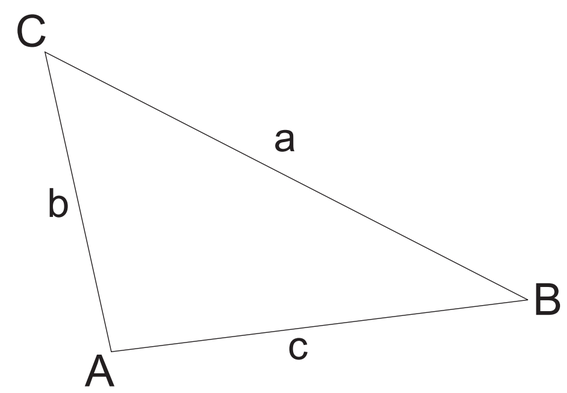
Antes un poco de notación. En un triángulo $\triangle ABC$, denotaremos por a al lado que se opone al ángulo interior con vértice en A, por b

al lado que se opone al ángulo con vértice en B y por c al lado que se opone al ángulo con vértice en C.

Las proposiciones de Euclides aludidas antes son:

I.5 "En todo triángulo isósceles, los ángulos que se oponen a los lados iguales son todos iguales"

Es decir, en todo triángulo $\triangle ABC$, $a = b \Rightarrow \angle A = \angle B$



I.6 "Si en un triángulo dos ángulos son iguales, los lados que se oponen a dichos ángulos, son también iguales"

Es decir, en todo triángulo $\triangle ABC$, $\angle A = \angle B \Rightarrow a = b$

I.18 " En todo triángulo, el lado más grande se opone al ángulo más grande"

Así, en todo triángulo $\triangle ABC$
$a > b \Rightarrow \angle A > \angle B$ y
$b > a \Rightarrow \angle B > \angle A$

I.19 "En todo triángulo, el ángulo más grande es subtendido por el lado más grande"

Es decir, en todo triángulo $\triangle ABC$
$\angle A > \angle B \Rightarrow a > b$ y
$\angle B > \angle A \Rightarrow b > a$

Vamos a demostrar, como De Morgan, las proposiciones I.6 y I.19, suponiendo que I.5 e I.18 son verdaderas.

Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera con lados a, b y c opuestos, respectivamente, a los ángulos interiores con vértices en A, B y C. Entonces, el siguiente razonamiento es válido y sus premisas son verdaderas, así que la conclusión es verdadera.

Tricotomía	$a = b \sqcup a > b \sqcup a < b$
Tricotomía	$\angle A = \angle B \sqcup \angle A > \angle B \sqcup \angle A < \angle B$
I.5	$a = b \Rightarrow \angle A < \angle B$
I.18	$a > b \Rightarrow \angle A > \angle B$
I.18	$a < b \Rightarrow \angle A < \angle B$

I.6 e I.19

$$(\angle A = \angle B \Rightarrow a = b) \wedge (\angle A > \angle B \Rightarrow a > b) \wedge (\angle A < \angle B \Rightarrow a < b)$$

1.8. Apéndice 2

No está de más que el lector tenga presente la siguiente lista de tautologías pues, si duda, le serán útiles en la construcción de demostraciones.

1. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
2. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
3. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q)]$
4. $p \vee \neg p$
5. $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
6. $[\neg q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \neg p$
7. $[\neg p \wedge (p \vee q)] \Rightarrow q$
8. $[p \wedge q] \Rightarrow p$
9. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
10. $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$
11. $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$
12. $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (q \vee s)$
13. $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \Rightarrow r]$ y si t es una contradicción, es decir,

    una proposición falsa por su forma, también son tautologías:

14. $(p \wedge \neg p) \Leftrightarrow t$
15. $(\neg p \Rightarrow t) \Leftrightarrow p$
16. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \Rightarrow t]$

Capítulo 2

CONJUNTOS

§1

2.1. Introducción

Comenzaremos a hablar de conjuntos, tratando de ponernos de acuerdo acerca de lo que vamos a entender por conjunto. Esto no es nada simple, ya que conjunto es un concepto bastante primitivo, análogo al concepto de punto o de la recta. De un punto se dice que es aquello que no tiene parte o dimensión; de una recta se dice que es una longitud sin anchura que tiene todos sus puntos en la misma dirección; finalmente, de un conjunto suele decirse que es una colección o reunión de objetos. Las "definiciones" de estos tres conceptos hacen uso de otras palabras que tendíamos que haber definido antes: ¿qué es una dimensión?, ¿qué es una longitud?, ¿qué es una colección?, ¿qué es una reunión?. Las palabras colección y reunión no son más que sinónimos de la palabra conjunto. Al decir que conjunto no es más que una reunión de objetos, no estamos caracterizando los conjuntos sino sólo dando una idea: la idea de que un conjunto es algo que tiene objetos, algo que tiene elementos.

Podemos hablar por ejemplo del conjunto de los árboles de C.U., del conjunto de los coches estacionados en el patio de la escuela, del conjunto de las montañas de Puebla, del conjunto formado por los números $2, 4, 6,$

8 y 10; del conjunto de nuestros parientes, del conjunto de los libros de una biblioteca, del conjunto de las bibliotecas de Puebla, del conjunto de rectas en un plano que pasan por un punto dado, del conjunto de factores que influyen en un problema, del conjunto de métodos que permiten resolver ese problema.

En la mayoría de estos conjuntos hay una relación clara (definida explícitamente) entre sus elementos, en el sentido de que existe una propiedad común que los define. Por ejemplo, todos los elementos del conjunto de montañas de Puebla, tienen esa propiedad común, la de ser montañas de Puebla.

Cada vez que decimos "el conjunto de objetos con cierta propiedad", a parte de hacer mención de alguna característica particular de los elementos del conjunto, parece que estamos hablando de un conjunto bien definido en el sentido de que se pueden conocer cuáles son sus elementos y cuáles no lo son.

Si decimos "el conjunto de todos los borregos gordos", cabe preguntar ¿qué tan gordo es gordo?. Si nos muestran algún borrego, ¿cómo podemos saber si es gordo o no?, ¿podemos considerar al conjunto de todos los borregos gordos como un conjunto bien definido?.

Otro ejemplo de un conjunto del que no podemos conocer sus elementos es el siguiente "El conjunto de los diez mejores músicos del mundo"; son los mejores ¿según quien?. El problema que se presenta con este tipo de "conjuntos" puede subsanarse facílmente si nos ponemos de acuerdo en los criterios de calificación de los objetos, por ejemplo, si nos ponemos de acuerdo en que un borrego gordo es aq̆el que pesa más de 100 kg. o en que un buen músico es el que ha vendido más de dos millones de discos y que los diez mejores músicos son los diez primeros que lo logren, entonces se desvanece el problema en estos ejemplos particulares. Sin embargo, el determinar los elementos de un conjunto sabiendo que son los que satisfacen cierta propiedad, sigue siendo complicado. Para ilustrar esta afirmación, construiremos "un conjunto" en el que será más difícil ponerse de acuerdo en un criterio que permita definir bien el conjunto:

Se cuenta que en un lejano poblado de un antiguo emirato, había un

barbero llamado As-Samet, "ducho en afeitar cabezas y barbas, maestro en escamondar pies y piernas, y en poner ventosas y sanguijuelas". Un día el Emir, dándose cuenta de la escacez de barberos del emirato, dió ordenes de que todos lo barberos del emirato sólo afeitaran a aquellas personas que no pudieran hacerlo por sí mismas (todas las personas del pueblo tienen que ser afeitadas, ya sea por el barbero o por ellas mismas). Un cierto día el barbero fue llamado a afeitar al Emir y le contó a éste sus congojas.

— En mi pueblo soy el único barbero. Si me afeito, entonces puedo afeitarme por mí mismo y por lo tanto no debería afeitarme el barbero de mi pueblo ¡que soy yo!. Pero si no me afeito, lo debe hacer un barbero por mí ¡pero no hay allí más barbero que yo!.

El Emir pensó que tales razonamientos eran muy profundos, a tal grado que premió al barbero con la mano de la más virtuosa de sus hijas y el barbero vivió eternamente feliz.

Llamemos B al conjunto de personas del pueblo que no se afeitan a sí mismas (y por tanto son afeitadas por el barbero). Sea b el barbero. ¿b es un elemento de B. Si b es un elemento de B, entonces b no se afeita a sí mismo y es afeitado por el barbero. Pero b es el barbero, así que b se afeita a sí mismo. Esto significa que b no es elemento de B. Si b no es elemento de B entonces b se afeita a sí mismo, por lo que no es afeitado por el barbero. Como b es el barbero, entonces b no se afeita a sí mismo, así que b es elemento de B. No sabemos si b es elemento de B o no. En este sentido, B no está bien definido.

De ahora en adelante convendremos en que para que a algo le podamos llamar Conjunto, debemos ser capaces de decir, acerca de cualquier objeto b, si es elemento o no del conjunto en cuestión. Dicho de otra forma, si B es un conjunto, entonces la afirmación "b es un elemento de B" es una proposición lógica.

En general, un "conjunto" no está bien definido (no es conjunto) si hay ambigüedad en relación a los elementos que lo componen.

En nuestro intento por ponernos de acuerdo en lo que vamos a entender por conjunto, comenzamos con la idea de que un conjunto es "algo que

tiene elementos". Después hemos restringido nuestra atención a aquellos conjuntos "bien definidos", es decir, con la propiedad de que sí para un objeto cualquiera nos preguntáramos ¿pertenece al conjunto?, se puede dar una respuesta clara y segura: sí o no. Sin embargo, aunque parezca extraño, resulta conveniente hablar acerca de conjuntos sin elementos, de "conjuntos vacíos". Por ejemplo, del "conjunto de los perros que hablan", del "conjunto de los dinosaurios vivos que existen en Africam", del "conjunto de las personas de más de doscientos años de edad", el "conjunto de los números menores que 6 y mayores que 7".

A pesar de no tener elementos, estos "conjuntos vacíos" satisfacen la propiedad mencionada arriba, porque dado cualquier objeto, a la pregunta ¿pertenece al conjunto? podemos responder diciendo **no**. Dichos "conjuntos" están bien definidos en este sentido y de hecho son distintas descripciones de un mismo conjunto sin elementos **el conjunto vacío** (esto se entenderá mejor cuando se precise el concepto de igualdad de conjuntos). Vamos a aceptar a este "conjunto" como un conjunto y lo denotaremos por el símbolo $\varnothing$, o con el símbolo $\{\}$.

Con este ejemplo observamos que el no poseer elementos no anula la calidad de ser conjunto.

A los objetos (si los hay) que forman un conjunto, les llamaremos **elementos** de dicho conjunto. Ahora bien, si A es un conjunto, la proposición "x es elemento de A" se denotará por $x \in A$. La negación de esta proposición, es decir, la proposición "x no es elemento de A" se denotará por $x \notin A$. ($x \in A$ suele leerse también "x pertenece a A").

Por ejemplo, si A es el conjunto de los primeros tres números naturales pares, entonces $2 \in A$, $4 \in A$, $6 \in A$, $24 \notin A$, $9 \notin A$, son proposiciones verdaderas.

Note que "pertenencia" es una relación que vincula cada elemento con un conjunto; no es una relación entre elementos de un conjunto.

Podemos representar a un conjunto de dos maneras: diciendo explícitamente cuáles son sus elementos, o enunciando alguna propiedad que caracteriza a esos elementos, es decir, alguna propiedad que cumplan los

elementos del conjunto, pero que sólo ellos la cumplan. En el ejemplo de arriba se puede definir: los elementos de A son 2, 4, 6, o bien A es el conjunto cuyos elementos son los tres primeros números naturales pares.

Si B es el conjunto cuyos elementos son: Oaxaca, Tlaxcala, Morelos, Estado de México, Guerrero, Hidalgo y Veracruz, B se puede describir diciendo: B es el conjunto de todos aquellos estados que colindan con el Estado de Puebla.

Si enumeramos todos los elementos de un conjunto, decimos que lo hemos **representado por extensión**, mientras que si enunciamos una propiedad definitoria de los elementos del conjunto, se dice que está **representado por comprensión**. Convendremos en escribir entre llaves a los elementos de un conjunto cuando esté representado por extensión. Así, nuestro conjunto B queda representado por extensión de la siguiente manera:

$$B = \{\text{Guerrero, Morelos, Oaxaca, Tlaxcala, Edo. de México, Hidalgo, Veracruz}\}$$

La representación por extensión es sumamente sencilla y no da lugar a ambigüedades. Sin embargo, no todos los conjuntos se pueden representar enumerando sus elementos. Por ejemplo, si A es el conjunto de los números naturales, lo más cercano a una representación de A por extensión es:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\},$$

representación que no es precisa, aunque en este caso da una idea de a qué conjunto nos estamos refiriendo. Más patético es el caso del conjunto de los numeros reales que, a parte de ser infinito, no lo podemos escribir "ordenadamente". Para este tipo de conjuntos, se prefiere la representación por comprensión, que además proporciona un criterio práctico para determinar si un elemento arbitrario pertenece o no a un conjunto determinado: los objetos que poseen la propiedad y sólo ellos, pertenecen al conjunto. A su vez, esto nos obliga a precisar con toda claridad la propiedad definitoria, para evitar ambigüedad e incertidumbre.

Si H es un conjunto, p una propiedad que define a los elementos de

H, suele escribirse:

$$H = \{x \mid x \text{ tiene la propiedad } p\},$$

para indicar que "H es el conjunto de todos los objetos x tales que x tiene la propiedad p" (la barra vertical $\mid$ se lee: "tal que"). Hay que advertir que el símbolo x que hemos adoptado para denotar los elementos de un conjunto, es enteramente arbitrario y que podemos emplear y, z, w, etc. Por ejemplo, Si A es el conjunto de los números naturales, se puede escribir

$$A = \{y \mid y \text{ es un número natural}\},$$

o si $B = \{\text{a, e, i, o, u}\}$, entonces B se puede escribir por comprensión así:

$$B = \{w \mid w \text{ es una vocal del alfabeto español}\}.$$

Observemos que puede ocurrir que algún elemento de un conjunto también sea un conjunto. Por ejemplo, el conjunto

$$\{1, \{2, 3\}, 4, \{5, 6\}\}$$

tiene 4 elementos, dos de los cuales son conjuntos: $\{2, 3\}$ y $\{5, 6\}$.

Los siguientes ejemplos muestran al menos una de las características mencionadas antes:

Ejemplos:

1. El conjunto de números naturales positivos que tienen la propiedad de que al elevarlos al cubo nos dan un número menor que 100, también se puede escribir como:

$$\{1, 2, 3, 4, \}$$

.

2. Al conjunto

$$\{n \mid n \text{ es un número entero y } n^3 = n\}$$

también lo podemos escribir como $\{-1, 0, 1\}$ ¿o no?

3. ¿Se podrán construir conjuntos A, B y C que tengan las propiedades: $A \in B$, $B \in C$ y $a \notin C$? Un análisis sencillo muestra que los conjuntos $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}, 2\}$ y $C = \{-1, \{\{1\}, 2\}, 3\}$ satisfacen las propiedades solicitadas.

Ejercicios 1.

1. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos están representados por extensión y cuáles por comprensión.

   a) A es el conjunto de todos los habitantes de Puebla.

   b) $B = \{10, x, 3x\}$.

   c) C es el conjunto de los números naturales.

   d) D es el conjunto de todos los números naturales x tales que $x > 5$, $x < 9$ y $x \neq 7$.

   e) $E = \{x \mid x \in C, x \text{ es par}, x > 5, \text{ y } x < 9\}$.

   f) $F = \{6, 8\}$

   g) $G = \{x \mid x \text{ es una recta del plano}\}$

   h) H es el conjunto de las bibliotecas de Puebla.

   i) I es el conjunto de todos los libros de todas las bibliotecas de Puebla.

   j) $J = \{\{x \mid x \in C\}, \{x \mid x \in E\}\}$.

   k) $K = \{\{x \mid x \in E\}, 6\}$.

   l) $L = \{0, \{1, 2\}, 3, 4\}$.

2. Siguiendo con la notación del ejercicio 1, responda las siguientes preguntas.

   a) Si x es un libro, ¿es cierto que $x \in H$?

   b) ¿La biblioteca Nicolás Copérnico es elemento de H?

   c) ¿Es cierto que $2 \in J$?

   d) ¿Es cierto que $6 \in K$?

   e) ¿Es cierto que $2 \in C$?

3. Representar por extensión los conjuntos siguientes.

   a) $A = \{x \mid x \text{ es natural y } x^2 < 20\}$.

   b) $B = \{x \mid x \text{ es natural } x > 1,\ x \leq 21 \text{ y } x \text{ es impar}\}$.

   c) $C = \{x \mid x \text{ es entero y } x^2 + 1 \leq 20\}$.

   d) $D = \{x \mid x \text{ es natural y } x = 4 \text{ o bien } x = 6\}$.

   e) $E = \{x \mid x \text{ es real y } x^2 = -1\}$.

§2

2.2. Conjunto Universal

Cuando hablamos de una propiedad que caracteriza a los elementos de un conjunto dado, generalmente esta propiedad se refiere a un conglomerado de objetos de cierto tipo. Por ejemplo, si p es la propiedad de ser vocal del abecedario, esta es una propiedad que se refiere a las letras del alfabeto y no por ejemplo a seres humanos o a materiales para construcción de casas o a estrellas del firmamento. En la teoría de Conjuntos que estamos desarrollando, trabajaremos a veces con varios conjuntos cuyos elementos son todos del mismo tipo, es decir, pertenecen todos a un mismo conglomerado de cosas, al que podemos llamar **conjunto universal**. Por ejemplo, en el siguiente capítulo de este curso, trabajaremos con números reales, racionales, irracionales, enteros, naturales; pero todos estos son números reales. El conjunto de los números reales juega el papel de conjunto universal, pues no se hará mención de otro tipo de objetos.

En el análisis de una situación particular, dicho conjunto universal U, consta de todos los elementos a los que se pueda referir esa situación. Es algo así como la fuente de todos los elementos que forman parte de los conjuntos sobre los que vamos a trabajar en esa situación particular; el conjunto en donde tendrán sentido las propiedades que caracterizan a los elementos de esos conjuntos.

No es difícil convencerse de que el conjunto universal no es único; depende del problema que se esté considerando y puede cambiar según

la situación de que se trate. Podemos elegirlo a nuestra conveniencia a relativa libertad. Por ejemplo, si los conjuntos a considerar son: Los futbolistas, los beisbolistas, los tenistas, los esquiadores y los nadadores, el universo más adecuado es el de los deportistas, aunque también serviría el de los seres humanos y el de los animales (biológicamente hablando).

Debemos subrayar que esta libertad de elección es relativa: al analizar una situación determinada, una vez que se ha decidido cuál es el conjunto universal U, este conjunto permanece fijo y todos los demás conjuntos mencionados en la misma situación se forman con elementos de U.

Es común usar diagramas para representar al conjunto universal U y a los conjuntos formados con elementos de U. Al conjunto universal se le puede representar con un círculo grande o con un rectángulo o alguna otra figura dentro de la cual se dibujen otras figuras que representen a los demás conjuntos, como indicando con ello que todos los elementos de estos conjuntos están en U

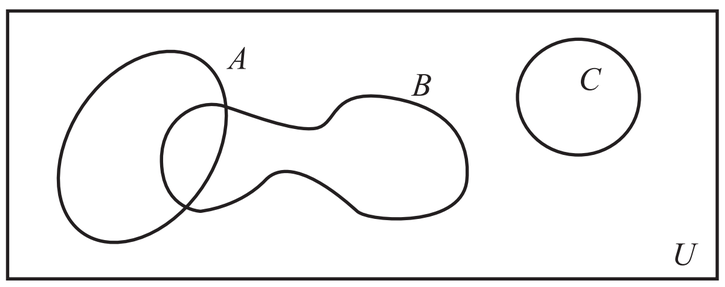


FIGURA 2.1: *A, B y C son subconjuntos cuyos elementos están en U*

A un diagrama de este tipo se le llama comúnmente **diagrama de Venn**

§3

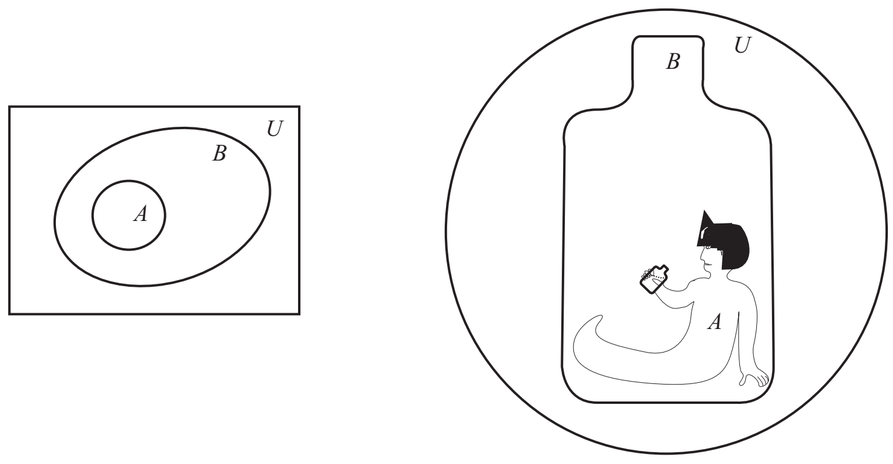
2.3. Subconjuntos

Dentro de un conjunto universal U, pueden existir dos conjuntos A y B con la propiedad de que todo elemento de A es un elemento de B, es decir, con la propiedad de que

$$\forall\, x \in U: \quad a \in A \Rightarrow x \in B$$

es una proposición verdadera.

Tal situación la representaríamos mediante un diagrama de Venn, por ejemplo así:



Ejemplos:

1. Sea U el conjunto de letras del alfabeto español y sean $A = \{\text{a, e, i, o, u}\}$ y B el conjunto de letras de la palabra murciélago. Escrito por extensión:

   $$B = \{\text{m, u, r, c, i, e, l, a, g, o}\}$$

   Los elementos de A son también elementos de B.

2. Sea U el conjunto de los seres vivos y sean A el conjunto de las personas mayores de 18 años y B el conjunto de los organismos pluricelulares. Cada elemento de A es elemento de B ¿o no?

Definición 2.3.1 Supongamos que A y B son conjuntos cuyos elementos están en un conjunto universal U. Diremos que el conjunto A es **subconjunto** del conjunto B si todo elemento de A es también elemento de B, es decir, si la proposición

$$\forall\, x \in U: \quad x \in A \Rightarrow x \in B$$

es verdadera.

Denotaremos a la proposición "A es subconjunto de B" como

$$A \subseteq B.$$

Algunas consecuencias sencillas de esta definición son las siguientes.

Sea U un conjunto universal cualquiera y A, B y C conjuntos cuyos elementos están en U. Entonces son verdaderas:

a) $A \subseteq U$, b) $A \subseteq A$,
c) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$
d) $\varnothing \subseteq A$

Demostración:

a) Por hipótesis, los elementos de A son elementos de U.

b) Es claro que la proposición $\forall\, x \in U :\ (x \in A \Rightarrow x \in A)$ es verdadera y entonces $A \subseteq A$ es verdadera.

c) Supongamos que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ son verdaderas. Esto significa que las dos proposiciones siguientes son verdaderas

$$\forall\, x \in U : \quad x \in A \Rightarrow x \in B \text{ y}$$

$$\forall\, x \in U : \quad x \in B \Rightarrow x \in C$$

De esto se concluye que la proposición

$$\forall\, x \in U : \quad x \in A \Rightarrow x \in C$$

es verdadera (Decir por qué)

d) Si $x \in U$, la proposición $x \in \varnothing$ es falsa y por lo tanto la implicación $x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$ es verdadera.

Como esto es cierto para cualquier elemento x de U, la proposición $\forall\, x \in U :\ x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$ es verdadera.

La proposición "A no es subconjunto de B", se acostumbra escribir así:

$$A \nsubseteq B.$$

$A \nsubseteq B$ es la negación de $A \subseteq B$, es decir, es equivalente a la proposición.

$$\exists\, x \in U : \quad x \in A \text{ y } x \neq B.$$

Ejemplos:

1. Supongamos que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 2, 5\}$. Como ($2 \in A$ y $2 \notin B$) es verdadera, $A \nsubseteq B$ es verdadera.

2. Supongamos que $A = \{\varnothing\}$. Como ($\varnothing \in A$ y $\varnothing \notin \varnothing$) es verdadera, $A \nsubseteq \varnothing$ es verdadera.

3. Consideremos los conjuntos:

   $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{n \,|\, n \text{ es un número natural par}\}$ y $C = \{x \,|\, x \text{ es un número natural menor que } 6\}$. entonces, las proposiciones $\{2, 3\} \subseteq A$, $A \subseteq C$, $\{10, 8, 6\} \subseteq B$ y $C \nsubseteq A$ son verdaderas, mientras que $C \subseteq B$, $\{3\} \in A$, $5 \in B$ y $C \subseteq A$ son proposiciones falsas. Compruebe el lector estas afirmaciones.

§4

2.4. Igualdad de conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, subconjuntos de U (¡ya podemos poner "subconjuntos de U"!), se podrían tener verdaderas $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. En tal caso los elementos de A son elementos de B y los elementos de B son elementos de A, es decir, A y B tienen los mismos elementos. Diremos entonces que A y B son iguales.

Definición 2.4.1 Sean A y B subconjuntos de un conjunto universo U. Diremos que A y B son **iguales** si es verdadera la proposición

$$A \subseteq B \quad \wedge \quad B \subseteq A.$$

En caso contrario diremos que A no es igual a B.

Denotaremos la proposición "A es igual a B" por $A = B$ y "A no es igual a B" por $A \neq B$.

Observemos que las proposiciones $(A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A)$ y $(\forall\, x \in U : x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ son equivalentes. De esta forma, podemos decir que dos conjuntos A y B son iguales si la proposición

$$\forall\, x \in U : \quad x \in A \Leftrightarrow a \in B$$

es verdadera y que $A \neq B$ si y solo si $[\exists\, x \in U \ : \ x \in A$ y $x \notin B]$ o $[\exists\, y \in U \ : \ y \in B$ y $y \notin A]$. También observemos que si $A = \{x \,|\, p(x)\}$, $B = \{x \,|\, q(x)\}$ y la proposición $(\forall\, x \in U \,|\, p(x) \Leftrightarrow q(x))$ es verdadera, entonces $A = B$.

Ejemplos:

1. Si $\varnothing_1$ y $\varnothing_2$ son conjuntos vacíos (o sea, sin elementos) y si x es un elemento cualquiera del universo, son falsas las proposiciones $x \in \varnothing_1$ y $x \in \varnothing_2$, o sea, es verdadera

   $$x \in \varnothing_1 \Leftrightarrow x \in \varnothing_2$$

   y por lo tanto es verdadera: $\varnothing_1 = \varnothing_2$

   Esto aclara la afirmación de que sólo hay un conjunto vacío.

2. Sea U el conjunto de las letras del alfabeto español. Sean A el conjunto de las letras de la palabra "alumno" y B el conjunto de letras de la frase "no mula". Entonces $A = B$ es verdadera.

3. $A = \{4,\, 8,\, 2^3,\, 3\}$, $B = \{(-2)^2,\, 8,\, 3\}$. Entonces $A = B$ es verdadera. ¿Por qué?

4. Es verdadera: $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, pues ya habíamos visto que $\{\varnothing\}$ no es subconjunto de $\varnothing$.

5. En el último ejemplo de la sección anterior son verdaderas las proposiciones $A \neq B$, $B \neq C$ y $A \neq C$.

Ya hemos dicho que para que dos conjuntos A y B sean igualitos, se necesita que $(A \subseteq A \wedge B \subseteq A)$ sea verdadera. ¿Qué pasaría si solamente tuviéramos que $A \subseteq B$ es verdadera pero $B \subseteq A$ es falsa?. En este caso todos los elementos de A son también elementos de B, pero no al revés, es decir, existe al menos un elemento de B que no es elemento de A. Entonces A y B son distintos.

Definición 2.4.2 Sean A y B subconjuntos de U. Cuando $A \subseteq B$ y $A \neq B$ son verdaderas, diremos que A es un **subconjunto propio** de B. Simbolizaremos con

$$A \subsetneq B$$

a la proposición "A es subconjunto propio de B".

Nota: No confundir $A \subsetneq B$ con $A \nsubseteq B$.

Ejemplos:

1. Sea U el abecedario español. Sea B el conjunto de letras de la palabra caperucito y $A = \{\text{a, e, i, o, u}\}$. Entonces $A \subsetneq B$ es verdadera.

2. Sea U el conjunto de todos los libros, sea B el conjunto de libros de la biblioteca "Niels Bohr" y sea C el conjunto de libros de Química de la misma biblioteca. Entonces $C \subsetneq B$ es verdadera, porque el libro "Geometric Transformations" de I. N. Yaglom no es de química y se dice que está en la biblioteca Niels Bohr.

3. En el Ejemplo 3 de la sección anterior $A \subsetneq C$.

Ejercicios 2.

1. Consideremos los siguientes conjuntos

$$P = \{\text{r, s, t, u, v, w}\}, \qquad Q = \{\text{u, v, w, x, y, z}\},$$

$$R = \{\text{s, u, y, z}\}, \qquad S = \{\text{u, v}\}, \qquad T = \{\text{s, u}\},$$

$$V = \{\text{s}\}, \qquad Z = \varnothing.$$

Diga cuál o cuáles de estos conjuntos:

a) Son subconjuntos de P y de Q únicamente.

b) Son subconjuntos de R pero no de Q.

c) No son subconjuntos de R pero sí de Q.

d) No son subconjuntos de P ni de R.

e) Son subconjuntos de todos.

2. Diga si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones y explíquese el por qué.

a) $\varnothing \subseteq \varnothing$, b) $5 = \{5\}$, c) $\varnothing \in \varnothing$, d) $3 \in \{3, 5\}$,
e) $\{a, b, c\} = \{c, b, d, e, a\}$, f) $\varnothing \subseteq \{1, 2, a, b\}$, g) $0 \in \varnothing$,
h) $4 \in \{\{1, 4\}, \{2, 4\}\}$, i) $\{3, 4\} \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$,
j) $\{2, 4\} = \{\{2\}, \{4\}\}$, k) $\{p\} = \{p, \varnothing\}$, l) $\{\varnothing, 0, 1\} = \{\varnothing, 1\}$,
m) $\{\varnothing\} = 0$, n) $\{2 - 2\} = \{0\}$, ñ) $\varnothing = \{\varnothing\}$,
o) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge, x < 3\} = \{2, 1\}$, p) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x < 2\} = \{0\}$,
q) $\{a, i\} \in \{a, e, i, o, u\}$ r) $\{e, i\} \subseteq \{a, e, i, o, u\}$.

3. Determine el conjunto S formado por los subconjuntos de más de dos elementos del conjunto $\{a, b, c, d, e\}$. Responda lo siguiente: ¿El conjunto $\{a, b, c\}$ es subconjunto de S?, ¿$\{\{a, b, c\}\} \subseteq S$. Fundamente sus respuestas.

4. Colocar un signo $=$ o $\neq$ según corresponda.

a) $\{a + b, (b - a)(b + a), a + a\} \quad \{b^2 - a^2, 2a, a + b\}$.

b) $\{5 + 1, 7, 34 + 16, 0\} \quad \{5 - 5, 50, 6, 8 - 1\}$.

c) $\{3^4, \sqrt{1}, 5^2, 25\} \quad \{81, 1^2, 25\}$.

d) $\{3^4, \sqrt{1}, 5^2, 25\} \quad \{81, 1^2, 25\}$.

e) $\left\{\frac{0}{15}, \frac{4}{4}, 1\right\} \quad \{0, 1\}$

5. Dado el conjunto $K = \{500, 17, 315\}$, determine los conjuntos L tales que la proposición ($\{500\} \subseteq L$ y $L \subseteq K$ y $L \neq K$) es verdadera.

6. Sea U el conjunto de números naturales y sean $A = \{x \in U \mid x \leq 5\}$ y $B = \{x \in U \mid -1 \leq 4 - 3x\}$. Pruebe que $A = B$ (*Sugerencia*: Demuestre que: $\forall\, x \in U :\ (x \leq 5 \Leftrightarrow -1 \leq 14 - 3x)$ es verdadera).

§5

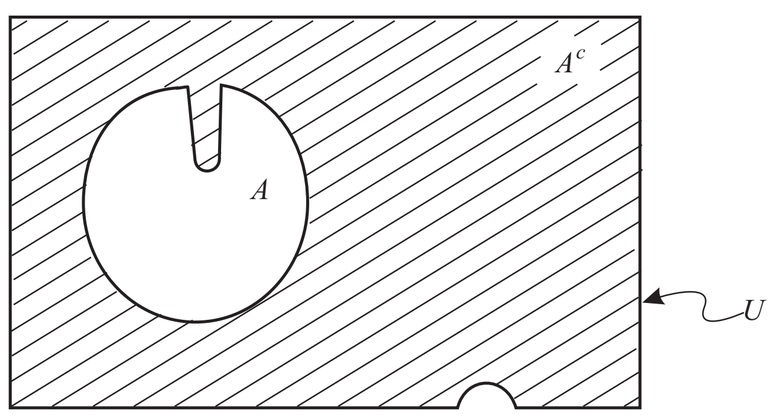
2.5. Construcción de nuevos conjuntos a partir de otros

Sea U un conjunto universal y sea $A = \{x \in U \mid p(x)\}$, donde $p(x)$ es una proposición abierta en U. Es claro que A es subconjunto de U. Podemos formar un conjunto que conste de aquellos elementos de U que no satisfacen $p(x)$, es decir, para los cuales $\neg p(x)$ es verdadera. A este conjunto le llamaremos el **complemento** del conjunto A en U. Lo denotaremos por $A^{\complement}$. Así pues

$$A^{\complement} = \{x \in U \mid \neg p(x)\} = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Es decir, $A^{\complement}$ es el conjunto de los elementos de U que no pertenecen al conjunto A.

Empleando los llamados diagramas de Venn, vemos que si el universo U está representado por todos los puntos que están dentro de un rectángulo (o alguna otra figura) y A está representado por los puntos que están dentro de un círculo (por ejemplo) que esté dentro del rectángulo, entonces $A^{\complement}$ estará representado por los puntos que están dentro del rectángulo pero fuera del círculo.



Ejemplos:

1. Si $U = \{1, 2, 3, 4\}$ y $A = \{1, 3\}$, entonces $A^{\complement} = \{2, 4\}$

2. Si $U = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ y $A = \{n \mid n$ es natural y x es par$\}$, entonces

$$A^{\complement} = \{n \in U \mid n \text{ no es par}\} = \{n \in U \mid n \text{ es impar}\}$$

3. Sea U el conjunto de alumnos de Cálculo Diferencial que se imparte en la Facultad de Ciencias Físico–Matemáticas. Si

   $A = \{x \in U \mid x$ aprobó el curso de Cálculo Diferencial$\}$. Entonces $A^{\complement} = \{x \in U \mid x$ sacó menos de 6 en el curso de Cálculo Diferencial$\}$.

4. Observemos que el complemento de un conjunto A depende del conjunto universal donde se están considerando los elementos de A; por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y el universo es el conjunto de los números naturales menores que 6 entonces, $A^{\complement} = \{5\}$; sin embargo, si consideramos ahora al conjunto de los números naturales menores que 10, tendríamos que $A^{\complement} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Algunas propiedades:

Sea U un conjunto universal

a) Para todo conjunto A, subconjunto de U, $(A^{\complement})^{\complement} = A$.

b) $\varnothing^{\complement} = U$.

c) $U^{\complement} = \varnothing$.

d) $A \subseteq B \Rightarrow B^{\complement} \subseteq A^{\complement}$.

Demostración:

a) Sea $A = \{x \in U \mid p(x)\}$. $A^{\complement} = \{x \in U \mid \neg p(x)\}$.

$$(A^{\complement})^{\complement} = \{x \in U \mid \neg(\neg p(x))\}$$

Como $\forall\, x \in U :\ \neg(\neg p(x)) \Leftrightarrow p(x)$ es verdadera, entonces $(A^{\complement})^{\complement} = A$.

b) Sea $C(x)$ una proposición abierta en U tal que para toda $x \in U$, $C(x)$ es falsa. Entonces $\varnothing = \{x \in \mid C(x)\}$, y $\varnothing^{\complement} = \{x \in U \mid \neg C(x)\}$.
Como $\neg C(x)$ es verdadera para cada $x \in U$, por lo tanto $\varnothing^{\complement} = U$.

c) Ejercicio.

d) Sean A y B dos subconjuntos cualesquiera de U.

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Rightarrow \forall\, x \in U : (x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow \forall\, x \in U : (\neg(x \in B) \Rightarrow \neg(x \in A)) \\ &\Rightarrow \forall\, x \in U : (x \notin B \Rightarrow x \notin A) \Rightarrow \forall\, x \in U : x \in B^{\complement} \Rightarrow x \in A^{\complement} \\ &\Rightarrow B^{\complement} \subseteq A^{\complement}. \end{aligned}$$

Nota: De aquí en adelante omitiremos la frase "es verdadera", salvo cuando sea necesaria.

Definición 2.5.1 Si A y B son subconjuntos de U, entonces

a) La **Unión** de A y B es el subconjunto de U formado por aquellos elementos que están en A o bien están B. Se denota por $A \cup B$, es decir

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$$

b) La **Intersección** de A y B es el conjunto formado por los elementos de U que están en A y están en B. Se denota por $A \cap B$, es decir

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Si $p(x)$ y $q(x)$ son proposiciones abiertas en U tales que

$$A = \{x \in U \mid p(x)\} \quad \text{y} \quad B = \{x \in U \mid q(x)\}$$

se tiene que

$$A \cup B = \{x \in U \mid p(x) \vee q(x)\}$$
$$A \cap B = \{x \in U \mid p(x) \wedge q(x)\}$$

Ejemplos:

3. Si $A = \{1, 3\}$ y $B = \{1, 2\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ y $A \cap B = \{1\}$.

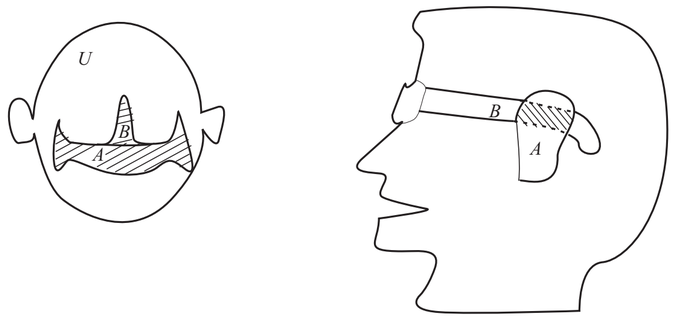


FIGURA 2.2: *Ejemplos: 1.- En la figura izquierda $A \cup B$ es lo rayado. 2.- En la figura derecha, lo rayado es $A \cap B$.*

4. Si $A = \{x \mid x \text{ es natural y par}\}$ y $B = \{x \mid x \text{ es natural e impar}\}$, entonces $A \cup B = \{x \mid x \text{ es natural}\}$ y $A \cap B = \varnothing$.

Propiedades:

Para cualesquiera A, B y C subconjuntos de U, se tiene

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $A \cap B = B \cap A$

c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

d) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

e) $A \cup A^{\complement} = U$

f) $A \cap A^{\complement} = \varnothing$

g) $A \cup \varnothing = A$

h) $A \cap U = A$

i) $A \cup U = U$

j) $A \cap \varnothing = \varnothing$

k) $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$

l) $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$

m) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

n) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ñ) $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$

o) $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$

A las propiedades ñ) y o) se les llama **leyes de D'Morgan**.

Demostración: (de algunas propiedades)

j) $A \cap \varnothing = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in \varnothing\} = \varnothing$ ya que para cualquier elemento $x \in U$, $x \in A \wedge x \in \varnothing$ es falsa.

l) $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$. Pero para cada $x \in U$, son verdaderas

$$x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \quad \text{y} \quad x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B,$$

y por lo tanto $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$.

m) Para cada $x \in U$ son verdaderas las bicondicionales siguientes

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow (x \in A) \vee x \in (B \cap C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

$$\therefore \ \forall x \in U : \ x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

o sea

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

ñ) $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$

Por eso $(A \cup B)^{\complement} = \{x \in U \mid \neg(x \in A \vee x \in B)\}$. Pero

$$\forall x \in U : \ (\neg(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B)\,.$$

Por lo tanto

$$(A \cup B)^{\complement} = \{x \in U \mid x \notin A \wedge x \notin B\} = A^{\complement} \cap B^{\complement}. \ \blacksquare$$

Dados los conjuntos A y B, subconjuntos de U,

$$A \cap B^{\complement} = \{x \in U \mid x \in A \quad \text{y} \quad x \notin B\},$$

es decir, $A \cap B^{\complement}$ está formado por los elementos de U que están en A pero no están en B. Es un "complemento relativo" y suele llamarse a este conjunto la **diferencia** de A y B y de denota por $A - B$.

En el caso particular en que $A = U$, $A - B$ coincide con el complemento de B.

Nota: $A - B$ es distinto de $B - A$.

Ejemplos:

1. Sean $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ y $B = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21\}$ sobre el conjunto universal

   $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$,

   entonces: $A - B = \{7, 9, 11\}$, $B - A = \{2, 8, 21\}$, $A \cap B = \{1, 3, 5, 13\}$, $A \cup B = \{\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 21\}$, $U - A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\} = A^{\complement}$, $(A \cap B) - A = \varnothing$, $(A \cup B) - A = \{2, 8, 21\}$ y $(A - B) - (B - A) = \{7, 9, 11\}$.

2. Sean $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ y $B = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21\}$ sobre el conjunto universal

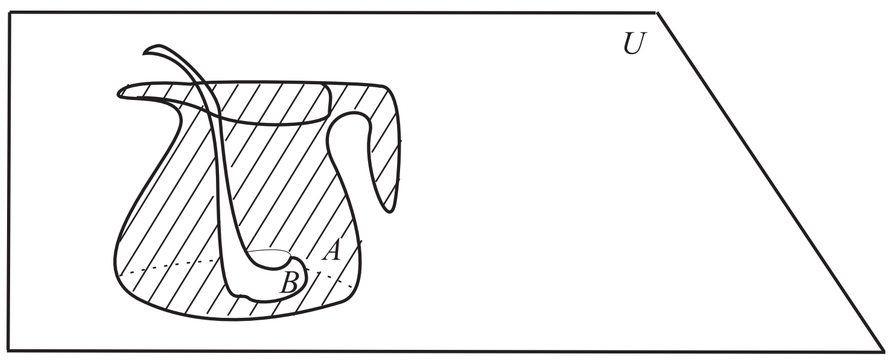
   $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$,

   calcular $U - A$, $U - B$ y $A - B$.

3. Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, entonces $(\mathbb{N} - \{1\}) - \{2\} = \mathbb{N} - \{1, 2\}$, ya que
   $\mathbb{N} - \{1\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 1\}$ y por ende

$$\begin{aligned}(\mathbb{N} - \{1\}) - \{2\} &= \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 1 \text{ y } n \notin \{2\}\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 1 \text{ y } n \neq 2\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \{1, 2\}\} = \mathbb{N} - \{1, 2\}.\end{aligned}$$

4. $A - B$ es la región sombreada en la siguiente figura



Para que el educando se familiarice con la unión, intersección, complemento y diferencia de conjuntos, demostraremos algunos teoremas que involucran estos aspectos.

1. *Sea U un conjunto universo; A y B subconjuntos de U.*

   a) Si $A \subseteq B$ entonces

   i) $A \cap B = A$ y
   ii) $A \cup B = B$

   Demostración (de i):) Queremos probar que $A \cap B = A$, suponiendo que $A \subseteq B$. Para ello hay que demostrar que $A \cap B \subseteq A$ y $A \subseteq A \cap B$. Ya demostramos que $A \cap B \subseteq A$ (ver l) de la página 66), así que sólo falta demostrar que $A \subseteq A \cap B$ (suponiendo $A \subseteq B$).

   Ahora bien, si $x \in A$ entonces $x \in B$, pues $A \subseteq B$. Por lo tanto $x \in A$ y $x \in B$, es decir, $x \in A \cap B$. Hemos probado

   $$\forall\, x \in U :\ x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$$

   y, por eso, $A \subseteq A \cap B$.

   (de ii):) Como $B \subseteq A \cup B$ (ver k) de la página 66), sólo resta demostrar que $A \cup B \subseteq B$, suponiendo $A \subseteq B$.

Si $x \in A \cup B$ entonces $x \in A$ o $x \in B$. Pero si $x \in A$ entonces $x \in B$. Así que $x \in B$. Por lo tanto:

$$\forall\, x \in U :\ x \in A \cup B \Rightarrow x \in B,$$

o sea, $A \cup B \subseteq B$ y de aquí que $A \cup B = B$.

b) *Si* $B \subseteq A$, entonces $A - (A - B) = B$.

Demostración:

$$\begin{aligned} A - (A - B) &= A \cap (A \cap B^{\complement})^{\complement} = A \cap (A^{\complement} \cup (B^{\complement})^{\complement}) \\ &= A \cap (A^{\complement} \cup B) = (A \cap A^{\complement}) \cup (A \cap B) \\ &= \varnothing \cup (A \cap B) = A \cap B. \end{aligned}$$

Como $B \subseteq A$, por (a)–i), $A \cap B = B$. Por lo tanto,

$$B \subseteq A \Rightarrow A - (A - B) = B.$$

c) $(A \cap B^{\complement})^{\complement} \cup A = U$

Demostración: Vamos a demostrar esta proposición de dos maneras. La primera es

$$\begin{aligned} (A \cap B^{\complement})^{\complement} \cup A &= (A^{\complement} \cup (B^{\complement})^{\complement}) \cup A = (A^{\complement} \cup B) \cup A \\ &= A^{\complement} \cup (B \cup A) = A^{\complement} \cup (A \cup B) \\ &= (A^{\complement} \cup A) \cup B = U \cup B = U \end{aligned}$$

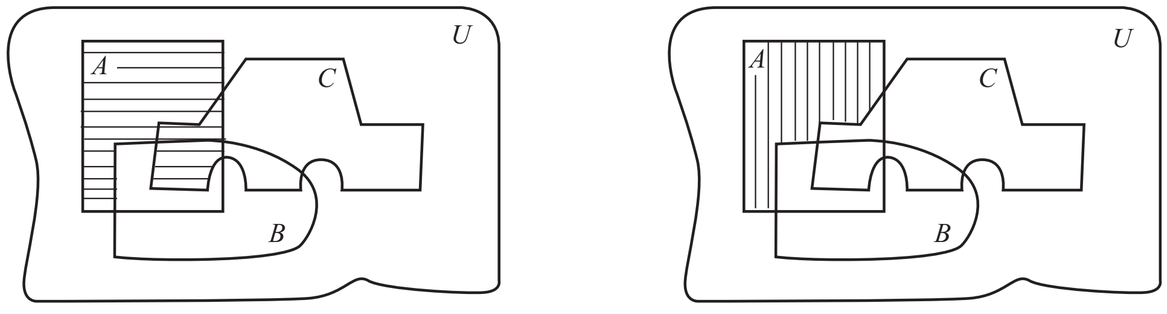
La segunda manera es:

$A \cap B^{\complement} \subseteq A$. Por lo tanto, $A^{\complement} \subseteq (A \cap B^{\complement})^{\complement}$. Entonces $U = A^{\complement} \cup A \subseteq (A \cap B^{\complement})^{\complement} \cup A$ (ver ejercicio 7–h). Pero por a) de la pagina 58, $(A \cap B^{\complement}) \cup A \subseteq U$. Por lo tanto

$$(A \cap B^{\complement})^{\complement} \cup A = U.$$

2. La proposición "para cualesquiera A, B y $C \subseteq U$, $(A - B) - C = A - (B - C)$" es falsa.

Demostración: Contraejemplo:



Ejercicios 3.

0. Probar que si U es un conjunto universo, $U^{\complement} = \varnothing$.

1. Haga las demostraciones de las propiedades enunciadas en los incisos a), b), c), d), e), f), g), h), i), k), n) y p) de la página 66.

2. Si A, B, C son subconjuntos cualesquiera de un conjunto universo U, probar que $(A-B)-C = A-(B\cup C)$. ¿A qué es igual $A-(B-C)$.

3. Dados el conjunto universal $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 9\}$, $B = \{2, 3, 5, 8\}$, $C = \{1, 4, 8, 9\}$, determine

   a) $(A^{\complement} \cup C) - (B - C^{\complement})$.
   b) $(A^{\complement} - (B^{\complement} \cap C)) - (C^{\complement} \cap B)$.
   c) $(A \cap B^{\complement})^{\complement} \cup (B^{\complement} - C)^{\complement}$
   d) $((A - B) \cap (A \cap B)) \cup ((A - B) \cap (B - A))$.

4. Sea A un conjunto cualquiera en un conjunto universo U. Halle expresiones diferentes para los conjuntos siguientes

   a) $A - \varnothing$,
   b) $A - A$,
   c) $A \cap \{\varnothing\}$,
   d) $\varnothing - A$,
   e) $\{\varnothing\} = \varnothing$,
   f) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \{\varnothing\}$,
   g) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$,
   h) $\varnothing \cap \{\varnothing\}$.

5. Proponer tres conjuntos H, J, K, que satisfagan las relaciones siguientes: $H \nsubseteq K$, $J \cap K = \varnothing$, $H \cap K \neq \varnothing$, $H \neq J$, $K \nsubseteq H$, $J \subseteq H$ (Para auxiliarse puede usar diagramas de Veen).

6. Si A, B y C son subconjuntos de U, determine cuál de las siguientes proposiciones es falsa. Para cada proposición falsa, construya un diagrama de Venn que muestre que es falsa.

   a) $(A \cap B)^{\complement} \subseteq A^{\complement}$,
   b) $A \cup B \supseteq A \cap B$,
   c) $(A \cap B) \cup A = A$,
   d) $(A \cap B)^{\complement} \subseteq (A \cap B)^{\complement}$,
   e) $B \subseteq A \cap B$,
   f) $B \cup (B \cap A)^{\complement} = U$,
   g) $B^{\complement} \subseteq (B \cap A)^{\complement}$,
   h) $A \cap B \subseteq A \cup B$,
   (i) $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$,
   (j) $A \cap B \subseteq C^{\complement} \wedge A \cup C \subseteq B \Rightarrow A \cap C = \varnothing$,
   (k) $A \subseteq (B \cup C) \wedge B \subseteq (A \cup C)^{\complement} \Rightarrow B = \varnothing$

7. Dados A, B y C subconjuntos cualesquiera de un conjunto universo U, demuestre las siguientes propiedades:

   a) Si $A \subseteq B$ entonces $A \cup (B - A) = B$.
   b) Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $A \subseteq B^{\complement}$.
   c) Si $A \cup B = U$ entonces $A^{\complement} \subseteq B$.
   d) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.
   e) $A - B = B - A$ si y sólo si $A = B$.
   f) $(A - B) \cap B = (B - A) \cap A$.
   g) $A^{\complement} - B^{\complement} = B - A$.
   h) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C \wedge A \cap C \subseteq B \cap C$.

8. Si A, B y C son subconjuntos de U, use las leyes de D'Morgan para simplificar.

   a) $\left[(A^{\complement} \cap B^{\complement}) \cup A^{\complement}\right]^{\complement}$.
   b) $\left[A^{\complement} \cup (B \cap C)\right]^{\complement}$.
   c) $\left[(A^{\complement} \cap B^{\complement}) \cup (B^{\complement} \cap C^{\complement}) \cup (A^{\complement} \cap C^{\complement})\right]^{\complement}$.

9. Descanse. ¡Buena falta le hace!

Capítulo 3

NÚMEROS REALES

§1

3.1. Introducción

Todo estudiante que llega a una escuela profesional ha tenido una relación mínima con los números. Al menos sabe operar los números con las leyes de la aritmética, conoce algunas propiedades de ellos y mínimamente aprendió a usarlos en problemas concretos.

Sin embargo, las posibilidades de estos números no han sido explotados en toda su amplitud, ya que ciertas propiedades esenciales no pueden ni siquiera enunciarse, con los conocimientos que se tienen en este momento.

Otro hecho que impide hacer un uso adecuado de los números es: no saber sus limitaciones. Es decir, qué propiedades no se pueden cumplir, ya que si se cumplieran contradirían los "fundamentos de los números".

A este nivel tenemos planteado un problema: cómo distinguir una propiedad esencial de otra que, aunque sea importante no es esencial.

Estas propiedades esenciales son los llamados **axiomas**. En lo que sigue postularemos cierto número de propiedades y trataremos de ver que

todas las demás son *consecuencias* de estas.

Así pues, los axiomas de los números reales –así llamaremos a los números que estudiaremos–, implicarán las propiedades que el alumno ha usado y muchísimas otras más.

Una aclaración, no pretendemos que lo que el alumno ha aprendido sea negado, sino más bien queremos que se sitúe en su real importancia.

Los Axiomas de los números Reales

En este capítulo, presentamos a los números reales como un conjunto (al cual denotaremos como $\mathbb{R}$) sujeto a dos operaciones (la suma y el producto), junto con una relación de orden total (la de "ser menor que") tal que cumple el axioma del supremo.

Distinguiremos tres grupos de axiomas para nuestro conjunto de números reales:

1.- Axiomas de Campo (referente a las operaciones de suma y producto).

2.- Axiomas de Orden (que se refieren a la relación "ser menor que").

3.- Axioma del Supremo (también referente a la relación de orden).

Además de la relación de orden en los reales, existe la relación de igualdad. Para ésta recordemos que cumple:

Sean a, b, $c \in \mathbb{R}$

a) *Si* $a = b$, *entonces* $b = a$.

b) *Si* $a = b$ *y* $b = c$ *entonces* $a = c$.

c) *Si* $a+c$ *denota al real que resulta de sumar* a *y* c, *y* ac *denota al real que resulta de multiplicar* a *y* c, *entonces* $a = b$ *implicará que* $a + c = b + c$ *y que* $ac = bc$.

Ahora enunciaremos los llamados **axiomas de campo**:

C1: Si a, $b \in \mathbb{R}$, entonces $a + b$, $ab \in \mathbb{R}$ (leyes de cerradura).

C2: Si a, $b \in \mathbb{R}$, entonces $a + b = b + a$ y $ab = ba$ (leyes conmutativas).

C3: Si a, b, $c \in \mathbb{R}$, entonces $a+(b+c) = (a+b)+c$ y $a(bc) = (ab)c$ (leyes asociativas).

C4: Si a, b, $c \in \mathbb{R}$, entonces $a(b + c) = ab + ac$ (ley distributiva).

C5: Existen 0, $1 \in \mathbb{R}$, con $0 \neq 1$, tales que: si $a \in \mathbb{R}$, entonces $a + 0 = a$ y $a \cdot 1 = a$ (0 se llamará **neutro aditivo** y 1 se llamará **neutro multiplicativo**).

C6: Si $a \in \mathbb{R}$, existe $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que $a + a_1 = 0$ y si $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, entonces existe $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a_2 = 1$.

Si estos 6 axiomas se cumplierán en algún otro conjunto, este conjunto se llamaría **campo**. Así pues, $\mathbb{R}$ es un campo.

En seguida los **axiomas de orden**: (la proposición "a menor que b se denotará $a < b$ o $b > a$).

O1: Si a, $b \in \mathbb{R}$, entonces una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera:

i) $a = b$.

ii) $a < b$.

iii) $b < a$ (ley de tricotomía)..

O2: Si a, b, $c \in \mathbb{R}$ y $a < b$, $b < c$, entonces $a < c$ (ley transitiva).

O3: Si a, b, $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ y $a < b$, entonces $ac < bc$ (consistencia del producto respecto a la relación de orden. Para referencias posteriores a ella, se escribirá: c.p.).

O4: Si a, b, $c \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces $a+c < b+c$ (consistencia de la suma respecto a la relación de orden. Para referencias posteriores a ella, se escribirá: c.s.).

Un campo que cumpla con estos 4 axiomas se llamará campo ordenado; los reales son un campo ordenado.

Ahora, finalmente, el **axioma del supremo**:

S1: Si $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que:

1. $A \neq \varnothing$.
2. A es *acotado superiormente*,

entonces A tiene un supremo en $\mathbb{R}$.

A campos ordenados que cumplan S1, se les llamará **campos ordenados completos**. Los reales son un ejemplo de estos campos.

Una aclaración: a primera vista, el axioma del supremo resulta bastante extraño, ya que términos como cota superior, cota de un conjunto y supremo son conceptos con los que el alumno del nivel medio superior no está familiarizado, pero a medida que avancemos en este capítulo, el alumno los conocerá y verá la importancia de este axioma.

§2

3.2. Consecuencias de los Axiomas de Campo

Ahora iniciaremos la demostración de algunas consecuencias de los axiomas de campo, en donde el alumno podrá reconocer algunas de las más comunes reglas de la aritmética. ¡Atención!: pedimos al alumno revisar la parte de métodos de demostración del capítulo de lógica; además de consultarla cada vez que algún paso de las demostraciones no quede claro.

Teorema 3.2.1

i) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ *y* $a + c = b + c$, *entonces* $a = b$.

ii) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ *y* $ac = bc$, *entonces* $a = b$.

(Ambas proposiciones son conocidas con los nombres de **ley de cancelación para la suma** y **ley de cancelación para el producto**). Debe notarse que en la primera, la ley se cumple para cualquier $c \in \mathbb{R}$, en cambio, en la segunda, se requiere que $c \neq 0$.

Demostración: (de i))
i) Sea $c_1 \in \mathbb{R}$ tal que $c + c_1 = 0$ (Axioma C6).
Entonces

$$\begin{array}{rrcll} & a + c & = & b + c & \\ \Rightarrow & (a + c) + c_1 & = & (b + c) + c_1 & \text{(propiedad de la igualdad)} \\ \Rightarrow & a + (c + c_1) & = & b + (c + c_1) & \text{(ley asociativa)} \\ \Rightarrow & a + 0 & = & b + 0 & \text{(Axioma C6)} \\ \Rightarrow & a & = & b & \text{(Axioma C5)} \end{array}$$

(de ii)) Si $c \neq 0$, el axioma C6 garantiza la existencia de un números real c_2 tal que $cc_2 = 1$. Por lo tanto:

$$\begin{array}{rrcll} & ac & = & bc & \\ \Rightarrow & (ac)c_2 & = & (bc)c_2 & \text{(propiedad de la igualdad)} \\ \Rightarrow & a(cc_2) & = & b(cc_2) & \text{(ley asociativa)} \\ \Rightarrow & a \cdot 1 & = & b \cdot 1 & \text{(Axioma C6)} \\ \Rightarrow & a & = & b & \text{(Axioma C5). } \blacksquare \end{array}$$

Como una primera consecuencia de la ley de cancelación se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.2.2 *Si* $a \in \mathbb{R}$, *entonces* $a \cdot 0 = 0$

Demostración:

$$\begin{array}{rrcll} & a \cdot 0 & = & a(0 + 0) & \text{(axioma C5)} \\ \Rightarrow & a \cdot 0 & = & a \cdot 0 + a \cdot 0 \wedge a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 & \text{(ley distributiva y neutro aditivo)} \\ \Rightarrow & a \cdot 0 + 0 & = & a \cdot 0 + a \cdot 0 & \text{(por transitividad)} \\ \Rightarrow & a \cdot 0 & = & 0 & \text{(ley de cancelación). } \blacksquare \end{array}$$

Los siguientes resultados resaltarán la importancia de las leyes de cancelación, ya que estos son consecuencia inmediata de éstos.

Teorema 3.2.3

i) Si $a, b \in \mathbb{R}$, existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $a + x = b$

ii) Si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $ax = b$.

Observación: Una vez más como en el teorema 3.2.1, debemos notar que en el caso i), el número real a puede ser cualquiera, mientras que la hipótesis de ii) exige que $a \neq 0$.

Demostración:
i) Sea $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que $c_1 + a = 0$ (Axioma C6)
y sea $x_0 = b + a_1$. Entonces $x_0 \in \mathbb{R}$ y además

$$\begin{aligned} a + x_0 &= a + (b + a_1) && \\ &= a + (a_1 + b) && \text{(ley conmutativa)} \\ &= (a + a_1) + b && \text{(ley asociativa)} \\ &= 0 + b && \text{(C6)} \\ &= b && \text{(C5)} \end{aligned}$$

Por lo tanto $x_0 = b + a_1$ satisface la igualdad.

Para hacer ver la unicidad, suponemos que existen x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$ tales que satisfacen la expresión $a + x = b$. Entonces

$$\begin{aligned} & a + x_0 = b \quad \text{y} \quad a + y_0 = b && \\ \Rightarrow \quad & a + x_0 = a + y_0 && \text{(transitividad de la igualdad)} \\ \Rightarrow \quad & x_0 = y_0 && \text{(ley de cancelación)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, sólo existe un número real que satisface la relación anterior; tal número es $x = b + a_1$.

ii) Como $a \neq 0$, existe $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $aa_2 = 1$. Sea $x_0 = a_2 b$. Entonces

$$\begin{aligned} ax_0 &= a(a_2 b) && \text{(propiedad de la igualdad)} \\ &= (aa_2)b && \text{(ley asociativa)} \\ &= 1 \cdot b && \text{(C6)} \\ &= b && \text{(C5)} \end{aligned}$$

De aquí, $x_0 = a_2 b$ satisface la proposición y la unicidad se demostrará como en el caso anterior.

Supongamos que existen x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$ tales que satisfacen la expresión $ax = b$, con $a \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} & ax_0 = b \quad \text{y} \quad ay_0 = b & \\ \Rightarrow \quad & ax_0 = ay_0 & \text{(propiedad de la igualdad)} \\ \Rightarrow \quad & x_0 = y_0 & \text{(ley de cancelación)} \end{aligned}$$

En consecuencia, sólo existe un único número real tal que cumple que $ax = b$ y tal número es $x = a_2 b$. ■

Hemos visto ya la existencia de números a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$ para cada $a \in \mathbb{R}$ tales que $a + a_1 = 0$ y $aa_2 = 1$ (a_2 existe si $a \neq 0$) que están garantizados por el axioma C6; sin embargo, no se especifíca cuántos números de este tipo tiene cada número real. El siguiente teorema, consecuencia del anterior, se refiere a tal situación.

Teorema 3.2.4

i) Para cada $a \in \mathbb{R}$ existe un único $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que $a + a_1 = 0$.

ii) Para cada $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, existe un único $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $aa_2 = 1$.

Demostración:

i) Sea $a \in \mathbb{R}$. Por el axioma C6, existe $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que $a + a_1 = 0$, es decir, a_1 satisface la relación: $a + x = 0$ y por el teorema 3.2.3, este número es único.

ii) Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, existe un $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $aa_2 = 1$ (axioma C6). Esto significa que a_2 satisface la relación $ax = 1$ y por el teorema 3.2.3, este número es único. ■

Este teorema nos permite establecer la siguiente definición.

Definición 3.2.1 Si $a \in \mathbb{R}$, $-a$ denotará al único número real que cumple $a + (-a) = 0$ y lo llamaremos el **inverso aditivo** de a. Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, a^{-1} denotará al único número real que cumple $aa^{-1} = 1$ y lo llamaremos el **inverso multiplicativo** de a.

Con esta definición, el teorema 3.2.3 puede enunciarse diciendo que el único número real que satisface la relación $a + x = b$ es $x = b + (-a)$, y también que el único número real que satisface la relación $ax = b$ con $a \neq 0$ es el número $x = a^{-1}b$. En lo que sigue denotaremos $a-b = a+(-b)$, y si $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = ab^{-1}$.

Haremos uso del teorema anterior para establecer los siguientes resultados.

Teorema 3.2.5

i) *Si* $a \in \mathbb{R}$, $-(-a) = a$.

ii) *Si* $a \in \mathbb{R}$ *y* $a \neq 0$ *entonces* $(a^{-1})^{-1} = a$.

Demostración:

i) El número $-(-a)$ satisface la relación $-a + x = 0$. También el número real a satisface la misma relación, entonces por unicidad, $-(-a) = a$.

ii) Si $a \neq 0$, el número real $(a^{-1})^{-1}$ satisface la relación $a^{-1}x = 1$ y también el número real satisface la misma relación. Por tanto, por unicidad, $a = (a^{-1})^{-1}$.

Teorema 3.2.6 *Sean* a, b, $c \in \mathbb{R}$. *Entonces*

i) $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

ii) $-(ab) = (-a)b = a(-b)$.

iii) *Si* $a \neq 0$, $b \neq 0$, *entonces* $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\text{i)}\quad (a+b)+[(-a)+(-b)] &= a+(b+[(-a)+(-b)]) && \text{(asosiativa)}\\
&= a+(b+[(-b)+(-a)]) && \text{(conmutativa)}\\
&= a+([b+(-b)]+(-a)) && \text{(asosiativa)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
(a+b)+[(-a)+(-b)] &= a+(0+(-a)) && \text{(propiedad del inverso)}\\
&= a+(-a)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Entonces $[(-a)+(-b)]$ es inverso aditivo de $(a+b)$ y por unicidad resulta que $-(a+b)=(-a)+(-b)$.

$$\begin{aligned}
\text{ii)}\quad (ab)+(-a)b &= [a+(-a)]b && \text{(ley distributiva)}\\
&= (0)b && \text{(prop. del inverso aditivo)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Entonces $(-a)b$ satisface $ab+x=0$ y por unicidad, $(-a)b=-(ab)$. De la misma manera se demuestra el resto del teorema. ■

Y Ahora, . . . ¡"Los quebrados"!

Teorema 3.2.7 *Si* a, b, c, $d\in\mathbb{R}$, *con* $b\neq 0$, $d\neq 0$ *y* $a\neq 0$, *entonces*

i) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$.

ii) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

iii) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{a^{-1}}{b^{-1}}=\frac{b}{a}$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\text{i)}\quad \tfrac{a}{b}+\tfrac{c}{d} &= ab^{-1}+cd^{-1} && \text{(por definición)}\\
&= (ab^{-1})\,1+(cd^{-1})1 && \text{(propiedad del 1)}\\
&= (ab^{-1})(dd^{-1})+(cd^{-1})(bb^{-1}) && \text{(inv. multiplicativo)}\\
&= a(b^{-1}dd^{-1})+c(d^{-1}bb^{-1}) && \text{(asocistividad)}\\
&= a(db^{-1}d^{-1})+c(bd^{-1}b^{-1}) && \text{(conmutatividad)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\tfrac{a}{b}+\tfrac{c}{d} &= (ad)(b^{-1}d^{-1})+(cb)(b^{-1}d^{-1}) && \text{(asociativa)}\\
&= (ad)(b^{-1}d^{-1})+(bc)(b^{-1}d^{-1}) && \text{(conmutativa)}\\
&= (ad+bc)(b^{-1}d^{-1}) && \text{(distributiva)}\\
&= (ad+bc)(bd)^{-1} && \text{((iii) del teorema 6)}\\
&= \tfrac{ad+bc}{bd} && \text{(conmutatividad)}
\end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned}
\tfrac{a}{b}\cdot\tfrac{c}{d} &= (ab^{-1})(cd^{-1}) && \text{(definición)}\\
&= a[b^{-1}(cd^{-1})] && \text{(asociatividad)}\\
&= a[(b^{-1}c)d^{-1}] && \text{(asociatividad)}\\
&= a[(cb^{-1})d^{-1}] && \text{(conmutatividad)}\\
&= a[c(b^{-1}d^{-1})] && \text{(asociatividad)}\\
&= (ac)(bd)^{-1} && \text{((iii) del teorema 6)}\\
&= \tfrac{ac}{bd} && \text{(definición).}
\end{aligned}$$

iii)
$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{a}{b}\right)^{-1} &= (ab^{-1})^{-1} && \text{(definición)}\\
&= a^{-1}(b^{-1})^{-1}] && \text{((iii) del teorema 6)}\\
&= a^{-1}b && \text{((ii) del teorema 5)}\\
&= ba^{-1} && \text{(conmutatividad)}\\
&= \tfrac{b}{a} && \text{(definición). ■}
\end{aligned}$$

Raíz Cuadrada

Para los estudiantes no es ajena la propiedad que tienen ciertos números, que consiste en ser el cuadrado de otro (aquí el cuadrado de un número real x significa $x\cdot x$ y se denota por x^2. Así pues, 2 tiene como cuadrado a 4, 9 es el cuadrado de 3. También recordará el alumno que si un número a era el cuadrado de un número b, a b se le llamaba la raíz cuadrada de a. Así, 2 es raíz cuadrada de 4 y 3 es raíz cuadrada de 9. Hay que aclarar que -2 también cumpliría que su cuadrado es 4, por tanto, también se podría llamar raíz cuadrada de 4.

Para aclarar esto, veamos el siguiente resultado, que se demostrará usando algunos axiomas de orden.

Teorema 3.2.8 *Sean a, $b \in \mathbb{R}$ tales que $a > 0$ y $b > 0$. Entonces: $a^2 = b^2$ si y sólo si $a = b$.*

Demostración: Demostraremos primero que

$$\text{si } a > 0,\ b > 0 \text{ y } a^2 = b^2,\ \text{entonces } a = b.$$

Así que sea $a > 0$, $b > 0$ y $a^2 = b^2$. Entonces

$$\begin{array}{lllll}
 & a > 0,\, b > 0 & \text{y} & a^2 - b^2 = 0 & \\
\Rightarrow & a > 0,\, b > 0 & \text{y} & (a-b)(a+b) = 0 & \text{(comprobar igualdad)} \\
\Rightarrow & a > 0,\, b > 0 & \text{y} & ((a-b) = 0 \text{ o } (a+b) = 0) & \text{(ver ejercicio 1)} \\
\Rightarrow & a + b > b \text{ y } b > 0 & \text{y} & ((a-b) = 0 \text{ o } (a+b) = 0) & \text{(C5)} \\
\Rightarrow & (a + b > 0 \text{ y } a + b = 0) & \text{o} & ((a+b) > 0 \text{ y } a - b = 0) & \\
\Rightarrow & a + b > 0 & \text{y} & a - b = 0 & \text{(contradice la tricotomía la primera parte de la disyunción)} \\
\Rightarrow & a - b = 0 & & & \\
\Rightarrow & a = b. & & &
\end{array}$$

Ahora demostraremos que

$$\text{Si } a > 0,\ b > 0 \text{ y } a = b,\ \text{entonces } a^2 = b^2.$$

Sean $a > 0$, $b > 0$ y $a = b$. Entonces

$$\begin{array}{llll}
 & a = b & & \\
\Rightarrow & aa = ab & \text{y} \quad ab = bb & \text{(propiedad de la igualdad)} \\
\Rightarrow & aa = bb & & \text{(transitividad de la igualdad)} \\
\Rightarrow & a^2 = b^2 & & \blacksquare
\end{array}$$

El teorema 3.2.8 nos permite demostrar el teorema 3.2.9

Teorema 3.2.9 *Si $a > 0$, $b > 0$ y $a^2 = b$, entonces a es el único número real con esta propiedad.*

Demostración:

Si $a' > 0$ y $(a')^2 = b$, entonces $(a')^2 = a^2$. Entonces $a' = a$ (teorema 3.2.8).■

Es claro que si $b = 0$, el único número que tiene cuadrado igual a 0, es el 0. Así que, dado $b > 0$ o $b = 0$, si existe $a > 0$ o $a = 0$ tal que $a^2 = b$, este número a es único.

Esto nos lleva a la definición:

Definición 3.2.2 Sea $b \in \mathbb{R}$ tal que $b > 0$ o $b = 0$. Si $a \in \mathbb{R}$ es tal que $a > 0$ o $a = 0$ y cumple $a^2 = b$, a se llamará la **raíz cuadrada** de b. En adelante denotaremos $a = \sqrt{b}$.

Nótese que si $a^2 = b$, también $(-a)^2 = b$, entonces

Definición 3.2.3 Si $b \in \mathbb{R}$ con $b > 0$ 0 $b = 0$. Si $a = \sqrt{b}$, llamaremos a $-a$ la **raíz negativa** de b $(-a = -\sqrt{b})$.

Una aclaración importante, si $b < 0$, no puede existir un número real que sea su raíz, ya que el cuadrado de cualquier número real es mayor o igual que cero [1], y por tricotomía, no podría ser igual a b. Hecho que demostraremos como consecuencia del teorema 3.2.3.

Sin embargo, quedará la pregunta ¿Siempre que un número es mayor o igual a cero, existe su raíz cuadrada?. Esta pregunta se resolverá al final de este capítulo. En lo que sigue demostraremos resultados acerca de raíces cuadradas, que estarán condicionados a la existencia de ellas.

[1] Adelantándonos un poco al §3, es fácil probar, como consecuencia del axioma O3 que si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $ab > 0$. En efecto:

$$a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow ab > 0 \cdot b \Rightarrow ab > 0$$

También es fácil probar que si $a < 0$, entonces $(-a) > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} &\text{si} \quad a > 0 \Rightarrow a^2 = aa > 0, \\ \text{si} \quad &a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow a^2 = (-a)^2 > 0 \end{aligned}$$

Teorema 3.2.10 *Si* $a > 0$ *o* $a = 0$ *y* $b > 0$ *o* $b = 0$, *entonces*

$$\sqrt{a\,b} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}.$$

Demostración:

Bastará demostrar que $(\sqrt{a}\,\sqrt{b})^2 = ab$, ya que como $\sqrt{a}\,\sqrt{b}$ es mayor o igual que cero y por la unicidad de la raíz cuadrada, concluiríamos que $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{a\,b}$. Para esto, ver los ejercicios 1. ■

Ecuaciones

En problemas concretos, la solución de estos, depende de poder encontrar números que satisfagan cierta relación numérica, como por ejemplo $5 + x = 22$, $3x^2 + 548233 = x$, $ax + b = 0$, $a^2x + b = 0$, $\sqrt{ax^2 + b} = c$, donde a, b, $c \in \mathbb{R}$.

El alumno habrá reconocido en este tipo de relaciones numéricas a las llamadas proposiciones abiertas. A este tipo de proposiciones abiertas se les llama **ecuaciones**. Más exactamente, las proposiciones abiertas sobre los números reales en las que se encuentre el símbolo de igualdad, y la variable x operada como un número real, se les llamará **ecuaciones**. Pero ahora el problema frente a las ecuaciones es: "Hallar todos los números que hagan verdadera la proposición abierta."

Entenderemos como **solución de la ecuación**, a un número que haga verdadera la proposición abierta. Al conjunto de verdad de la proposición abierta, le llamaremos el **conjunto solución de la ecuación**.

Solucionar una ecuación es hallar su conjunto solución.

Con este nuevo lenguaje, el teorema 3.2.3 quedaría enunciado como:

i) Si a, $b \in \mathbb{R}$, existe una única solución de la ecuación:

$$a + x = b$$

ii) Si a, $b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, existe una única solución de la ecuación:

$$ax = b$$

A continuación daremos algunos ejemplos de cómo solucionar ciertos tipos de ecuaciones:

Ejemplos:

1. Sea la ecuación
$$3x + 5 = x - 3$$
veamos que:
$c \in \mathbb{R}$ es solución de la ecuación $\Leftrightarrow 3c + 5 = c - 3 \Leftrightarrow 3c + (-c) = (-5) - 3 \Leftrightarrow 2c = -8 \Leftrightarrow c = -\frac{8}{2} = -4$.
Así que el conjunto solución es: $\{-4\}$.

2. Sea la ecuación
$$x^2 - 5 = -4x$$
c es solución de $x^2 - 5 = -4x \Leftrightarrow c^2 + 4c - 5 = 0 \Leftrightarrow (c+5)(c-1) = 0 \Leftrightarrow c + 5 = 0$ o $c - 1 = 0 \Leftrightarrow c = -5$ o $c = 1$
Así que el conjunto solución es: $\{-5, 1\}$

3. Veamos en general una ecuación del tipo
$$x^2 + px + q = 0,$$
donde $p, q \in \mathbb{R}$
c será solución de ella $\Leftrightarrow c^2 + pc + q = 0 \Leftrightarrow c^2 + 2\left(\frac{p}{2}\right)c + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \Leftrightarrow \left(c + \frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(c + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ y $\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \text{ o } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0 \text{ o } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0\right)$ (tricotomía) $\Leftrightarrow \left(c + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ y $\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \text{ o } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0\right)$.
Note que si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, entonces no puede ser el cuadrado de un número real, entonces los $c \in \mathbb{R}$ que sean solución de la ecuación, no existen y el conjunto solución será el $\varnothing$.
Pero también
$$c + \frac{p}{2} > 0 \text{ o } c + \frac{p}{2} = 0 \text{ o } c + \frac{p}{2} < 0$$
Usando la definición de raíz y el ejercicio 5 de los ejercicios 1 de esta sección, tendremos

a) $\left(c+\frac{p}{2}>0 \text{ o } c+\frac{p}{2}=0\right)$ y $\left(\left(c+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right)$ y $\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0 \text{ o } \left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0\right)$

$\Leftrightarrow c+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ o sea $c=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$

o bien

b) $\left(c+\frac{p}{2}<0\right)$ y $\left(\left(c+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right)$ y $\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0 \text{ o } \left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0\right)$

$\Leftrightarrow c+\frac{p}{2}=-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ o sea $c=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$

Resumiendo:

I) El conjunto solución de $x^2+px+q=0$ es el conjunto vacío $\Leftrightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$

II) El conjunto solución de $x^2+px+q=0$ es $\left\{-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},\ -\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right\} \Leftrightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0$ o $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0$

4. Ahora sea la ecuación

$$ax^2+bx+c=0,$$

con $a\neq 0$. Entonces

d es solución de $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow ad^2+bd+c=0 \Leftrightarrow$ (como $a\neq 0$) $\frac{1}{a}(ad^2+bd+c)=0 \Leftrightarrow d^2+\frac{b}{a}d+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow d$ es solución de $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$.

Ahora, usando lo anterior tenemos:

El conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$ es el conjunto vacío

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} < 0$$

o bien, el conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$ es el conjunto

$$\left\{ -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}},\ -\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \right\}.$$

Ejercicios 1.

1. Demuestre que si a, b, $c \in \mathbb{R}$ entonces:

   a) $a - b = -(b - a)$.

   b) $(a + b)(a - b) - a(a - b) + b(b - a) = 0$.

   c) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0$.

   d) $(-a)(c - d) = ad - ac$.

   e) Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$ y $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$.

   f) $a^{-1} = 1 \Rightarrow a = 1$.

   g) $(-a)^2 = a^2$.

   h) $(ab)^2 = a^2 b^2$.

   i) $-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{(-a)}{b} = \frac{a}{(-b)}$.

   j) $1^{-1} = 1$.

   k) $-0 = 0$.

   l) Demuestre que 0 es el único real tal que $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = a$ y que 1 es el único real tal que $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = a$.

   m) $a > 0$, $b > 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

   n) Si $a > 0$, $b > 0$ ¿Cuándo $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$?.

ñ) Si $b \neq 0$, $c \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

o) Si $b \neq 0$, $c \neq 0$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

p) ¿Cuándo $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$.

2. Halle el conjunto solución de las siguientes ecuaciones

a) $\frac{3x}{2} + (x - 5) = 0$.

b) $\frac{x-4}{x} + \frac{x^{-1}}{3} = -2$.

c) $x^{-1}(x - 3) + x(2x^{-1} + 5) = 9$.

d) $\frac{(3-2x)^{-1}}{x^{-1}} + \left[\frac{x}{3-2x}\right]^{-1} = 4$.

e) $(x - 7)x^{-1} + (x^{-1} - 7)x = 0$.

3. Halle la base de un rectángulo de altura 7cm y cuya área es el tripe de la longitud de su perímetro.

4. Un padre de familia de 22 años tiene un hijo de 2. ¿Dentro de cuánto tiempo la edad del padre será el triple de la del hijo?.

5. Demuestre:

$$b > 0 \text{ y } a < 0 \text{ tal que } a^2 = b \Leftrightarrow a = -\sqrt{b}.$$

6. Demostrar que existen números reales a y b $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

7. Cuál o cuáles de las afirmaciones siguientes es verdadera:

a) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$.

b) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = -b$.

c) $a^2 = b^2 \Rightarrow a^3 = b^3$ $(a^3 = a^2 \cdot a)$.

8. Demostrar que $a^3 = 1 \Leftrightarrow a = 1$.

9. Demostrar que $a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$.

10. Hallar el error en la "demostración" de la afirmación:

    Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $a = 0$.

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{R} &\Rightarrow a^2 = a^2 \\ &\Rightarrow a^2 - a^2 = a^2 - a^2 \\ &\Rightarrow (a-a)(a+a) = a(a-a) \\ &\Rightarrow a + a = a \\ &\Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

§3

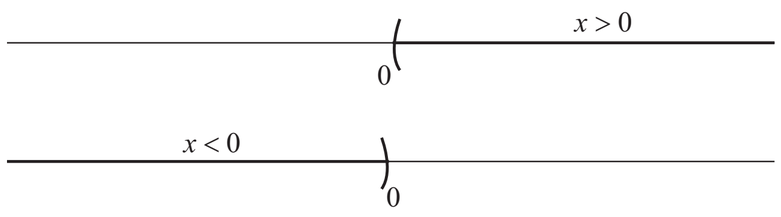
3.3. Consecuencias de los Axiomas de Orden

En esta sección demostraremos algunas consecuencias de los axiomas de orden, ya enunciados antes, pero previamente comentaremos la llamada recta numérica.

Un auxiliar en la solución de problemas matemáticos, es la descripción gráfica del problema. Así pues, en los conjuntos el uso de diagramas, permitía entender el problema con mayor facilidad.

En el caso de los números reales, usaremos una recta "horizontal", como descripción de este conjunto (a la que llamaremos **recta numérica**), en la que la propiedad $x < y$ para números, significará geométricamente que el punto correspondiente al número x está a la "izquierda" del punto correspondiente al número y.

Así, si queremos describir todos lo números mayores que cero, estos formarán la semirrecta de la recta numérica (sin incluir al cero) que se extiende a la derecha del punto correspondiente al cero. Para menores que cero, será la semirrecta complementaria, sin incluir el punto inicial.



Una aclaración, nunca una descripción geométrica del teorema sustituirá a la demostración, pero si puede permitirnos comprender el teorema y de ahí diseñar alguna demostración.

Veamos el siguiente problema: ¿1 está a la izquierda o a la derecha del cero?. Esto dependerá de cuál de las relaciones siguientes se cumpla: $1 = 0$, $1 < 0$ o $1 > 0$.

Sabemos por tricotomía, que sólo una de ellas se cumplirá, además por el axioma C5, $1 \neq 0$, así que sólo alguna de las dos restantes se cumplirá. Si suponemos $1 < 0$, tendremos:

$$\begin{aligned} 1 < 0 &\Rightarrow 1 + (-1) < -1 \quad \text{(c.s)} \\ &\Rightarrow 0 < -1 \end{aligned}$$

Ahora bien, como $0 < -1$ y suponemos que $1 < 0$, entonces

$$\begin{aligned} 1 < 0 &\Rightarrow 1(-1) < 0(-1) \quad \text{(consistencias del producto)} \\ &\Rightarrow -1 < 0 \end{aligned}$$

Resumiendo, si $1 < 0$ entonces $0 < -1$ y $-1 < 0$ (contradice la tricotomía). Por lo tanto,

$$0 < 1.$$

Así que 0 estará a la izquierda de 1. Use esta misma estructura de la demostración para ver que $-1 < 0$.

Este comentario ilustra el uso de la ley de tricotomía en demostraciones, pero además demuestra que existen números a la izquierda del cero y a la derecha de cero. (-1 y 1 respectivamente). Así, si definimos

Definición 3.3.1

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, \qquad \mathbb{R}_-\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}.$$

$\mathbb{R}_+$ se llamará el **conjunto de los reales positivos**. $\mathbb{R}_-$ se llamará el **conjunto de los reales negativos**.

Lo anterior demuestra que $\mathbb{R}_+ \neq \varnothing$ y $\mathbb{R}_- \neq \varnothing$ y la tricotomía demuestra que

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_-$$

Antes de entrar en materia demos una notación más:

$$\text{Si } x < y \text{ o } x = y, \text{ escribiremos } x \leqslant y \text{ o } y \geqslant x$$

De acuerdo a esta notación:

$$\text{Si } x < y, \text{ entonces } x \leqslant y$$
$$\text{Si } x = y, \text{ entonces } x \leqslant y \text{ o } x \geqslant y$$

Pero si $x \leqslant y$ no necesariamente $x < y$, y también si $x \leqslant y$ no necesariamente $x = y$.

Ahora demostraremos tres teoremas que permitirán operar con pares de números que están en la relación de menor que.

Teorema 3.3.1 *Si $a \in \mathbb{R}$, se cumple*

1) $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$

2) $a > 0 \Leftrightarrow a^{-1} > 0$

Demostración:

1) Demostraremos la implicación: $a > 0 \Rightarrow -a < 0$.
   Ahora bien: si $a > 0$ entonces $a + (-a) > -a \Rightarrow 0 > -a$.
   De igual manera: Si $-a < 0$ entonces $(-a) + a < a \Rightarrow a > 0$.

2) Queremos demostrar que

$$\text{si } a > 0 \text{ entonces } a^{-1} > 0$$

   sea $a > 0$ y supongamos que $a^{-1} < 0$ o $a^{-1} = 0$.
   Si $a^{-1} = 0$ entonces $aa^{-1} = 0$.
   Pero $aa^{-1} = 1$. Entonces $1 = 0$. Contradicción con el axioma C5.

$$\begin{array}{lll} \text{Si } a > 0 \text{ y } a^{-1} < 0 & \text{entonces} & \text{(consistencia del producto)} \\ & aa^{-1} < 0 \cdot a & \\ & \Rightarrow 1 < 0 & \end{array}$$

   Esto contradice el resultado previo.
   Así que: Si $a > 0$ entonces $a^{-1} > 0$.
   Resta demostrar que $a^{-1} > 0 \Rightarrow a > 0$

   Como $a = (a^{-1})^{-1}$ y si $a^{-1} > 0$ entonces $(a^{-1})^{-1} > 0$ (por la implicación anterior). Así que $a > 0$. ■

Antes de enunciar el siguiente teorema demos la:

Definición 3.3.2 Sean $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$. tienen **signos iguales** si

$$1)\ x, y \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{o} \qquad 2)\ x, y \in \mathbb{R}_-$$

Pero en caso que:

$$1)\ x \in \mathbb{R}_+ \text{ y } y \in \mathbb{R}_- \quad \text{o} \quad 2)\ x \in \mathbb{R}_- \text{ y } y \in \mathbb{R}_+$$

Se dirá que x y y tienen **signos contrarios** o **distintos**.

Es fácil ver que si x, y tienen signos iguales, entonces $xy \in \mathbb{R}_+$. También, si x, y tienen signos distintos, entonces $xy \in \mathbb{R}_-$.

Teorema 3.3.2 *Si $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple*

1. $a < b \Leftrightarrow -b < -a$

2. *Si a y b tienen el mismo signo, entonces:*

$$a < b \Leftrightarrow b^{-1} < a^{-1}.$$

Demostración:

1. $$\begin{aligned} \text{Si } a < b &\Rightarrow (-a) + a < (-a) + b && \text{(C5)} \\ &\Rightarrow 0 < (-a) + b \\ &\Rightarrow -b + 0 < ((-a) + b) + (-b) && \text{(C5)} \\ &\Rightarrow -b < -a \end{aligned}$$

   Recíprocamente

   $$\begin{aligned} -b < -a &\Rightarrow -b + b < -a + b && \text{(C5)} \\ &\Rightarrow 0 < -a + b \\ &\Rightarrow a + 0 < a + ((-a) + b) && \text{(C5)} \\ &\Rightarrow a < b \end{aligned}$$

2. Si a, b tienen el mismo signo y $a < b$, entonces:

$ab \in \mathbb{R}_+$ y $a < b$ (ver ejercicios 2)
$\Rightarrow (ab)^{-1} \in \mathbb{R}_+$ y $a < b$ (teorema 3.3.1)
$\Rightarrow a^{-1}b^{-1} \in \mathbb{R}_+$ y $a < b$ (teorema 3.2.6)
$\Rightarrow (a^{-1}b^{-1})a < (a^{-1}b^{-1})b$ (consistencia del producto)
$\Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$

Ahora, si a, b tienen igual signo y $b^{-1} < a^{-1}$, entonces

a^{-1}, b^{-1} tienen el mismo signo y $b^{-1} < a^{-1}$ (3.3.1)
$\Rightarrow (a^{-1})^{-1} < (b^{-1})^{-1}$ (usando lo anterior)
$\Rightarrow a < b$ (teorema 3.2.5) ■

Veamos la última serie de propiedades que nos permitirán operar desigualdades.

Teorema 3.3.3 *Si a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, se cumple:*

1. *Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$*

2. *Si $0 < a < b$ y $0 < c < d$, entonces $ac < bd$*

Demostración:

1. Si $a < b$ y $c < d \Rightarrow a + c < b + c$ $b + c < d + b$ (c.s)
   $\Rightarrow a + c < b + d$ (transitividad)

2. $0 < a < b$ y $o < c < d$
   $\Rightarrow$ $ac < bc$ y $bc < bd$ (c.p)
   $\Rightarrow$ $ac < bd$ (transitividad)

En estos tres teoremas hemos enunciado propiedades análogas para la suma y el producto, sin embargo, en el caso del producto se piden restricciones en los elementos de las desigualdades, solicitamos al alumno su colaboración y poner atención en esto. Un resultado que es consecuencia de este teorema es el siguiente:

$$\forall, x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0$$

la demostración de este resultado se deja como ejercicio.

Ahora enunciamos un teorema que también es consecuencia del teorema 3.3.3 y que nos será muy útil en los teoremas posteriores.

Teorema 3.3.4 *Si* $a,\, b \in \mathbb{R}_+$, *entonces*

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2.$$

Demostración:

Use el teorema 3.3.3 y "multiplique" $a < b$ con $a < b$ para demostrar que

$$a < b \Rightarrow a^2 < b^2.$$

Ahora, para demostrar que

$$a,\, b, \in \mathbb{R}_+, \quad a^2 < b^2 \Rightarrow a < b,$$

supongamos que $a,\, b \in \mathbb{R}_+$, $a^2 < b^2$ y a no es menor que b. Entonces

$$\begin{aligned}
&a,\, b \in \mathbb{R}_+,\ a^2 < b^2 \text{ y } (a = b \text{ o } a > b) && \text{(tricotomía)}\\
&\Rightarrow (a,\, b \in \mathbb{R}_+,\ a^2 < b^2 \text{ y } a = b) \text{ o } (a,\, b \in \mathbb{R}_+,\ a^2 < b^2 \text{ y } a > b)\\
&\Rightarrow (a^2 < b^2 \text{ y } a^2 = b^2 \text{ o } (a^2 < b^2 \text{ y } a^2 > b^2) && \text{(teorema 3.3.3)}
\end{aligned}$$

esto contradice la tricotomía.

En el siguiente teorema caracterizaremos los números reales que tienen su cuadrado mayor (o menor) que un número real fijo.

Teorema 3.3.5 *Si* $b \in \mathbb{R}_+$, *entonces:*

1. $a^2 < b \Leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$.
2. $b < a^2 \Leftrightarrow \sqrt{b} < a \quad o \quad \sqrt{b} < -a$.

Demostración:

(1) Si $a = 0$, (1) es trivial. Sea $a \neq 0$, es decir,

$$a < 0 \quad \text{o} \quad a < 0.$$

Demostraremos (1) para los dos casos:

$$\begin{aligned}
& a^2 < b,\, a > 0 \text{ y } b \in \mathbb{R}_+\\
\Rightarrow\quad & a^2 < b = \sqrt{b}\sqrt{b} = \left(\sqrt{b}\right)^2\\
\Rightarrow\quad & a < \sqrt{b} && \text{(teorema 3.3.4)}
\end{aligned}$$

Además, $-\sqrt{b} < 0 < a$. Así que: $-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

Ahora:

$$\begin{array}{lll} & a > 0 \text{ y } -\sqrt{b} < a < \sqrt{b} & \\ \Rightarrow & a > 0 \text{ y } a < \sqrt{b}2 & \\ \Rightarrow & a^2 < (\sqrt{b})^2 & \text{(teorema 3.3.4)} \\ \Rightarrow & a^2 < b & \end{array}$$

Veamos el caso en que $a < 0$

$$\begin{array}{lll} & a < 0 \text{ y } b \in \mathbb{R}_+ \text{ y } a^2 < b & \\ \Rightarrow & -a > 0, (-a)^2 = a^2 < b \wedge b \in \mathbb{R}_+ & \text{(teorema 3.3.1)} \\ \Rightarrow & -a > 0 \wedge (-a)^2 < b = \sqrt{b}\sqrt{b} = (\sqrt{b})^2 \text{ y } b \in \mathbb{R}_+ & \\ \Rightarrow & -a < \sqrt{b} & \text{(teorema 3.3.4)} \end{array}$$

Como $a < 0 < \sqrt{b}$ entonces $-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

Ahora: Si $a < 0$ y $-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

$$\begin{array}{lll} & -a > 0, -\sqrt{b} < a & \\ \Rightarrow & -a > 0, -a < \sqrt{b} & \\ \Rightarrow & (-a)^2 < (\sqrt{b})^2 & \text{(teorema 3.3.4)} \\ \Rightarrow & a^2 < b & \end{array}$$

(2) Observe que si $a = 0$, $b < a^2$ es falso, pero también $\sqrt{b} < a$ o $\sqrt{b} < -a$ es falsa. Así que la bicondicional es verdadera.

Ahora veamos el caso en que $a \neq 0$. O sea:

$$a > 0 \quad \text{o} \quad a < 0$$

Si $b < a^2$ y $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow & \sqrt{b}\sqrt{b} = b < a^2 & \\ \Rightarrow & \sqrt{b} < a & \text{(teorema 3.3.4)} \end{array}$$

$b < a^2$ y $a < 0$ y $b \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow & (\sqrt{b})^2 < a^2 = (-a)^2, -a > 0 & \\ \Rightarrow & \sqrt{b} < -a & \text{(teorema 3.3.4)} \end{array}$$

Así que $b < a^2$, $b \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \sqrt{b} < a$ o $\sqrt{b} < -a$

Ahora la otra implicación:

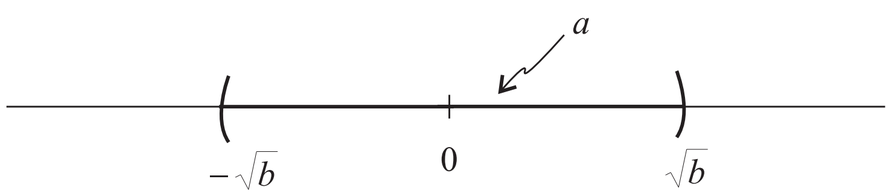
$$\begin{aligned} \sqrt{b} < a \quad &\Rightarrow 0 < \sqrt{b} < a \\ &\Rightarrow (\sqrt{b})^2 < a^2 \quad \text{(teorema 3.3.4)} \\ &\Rightarrow b < a^2 \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \sqrt{b} < -a \quad &\Rightarrow 0 < \sqrt{b} < -a \\ &\Rightarrow (\sqrt{b})^2 < (-a)^2 \quad \text{(teorema 3.3.4)} \\ &\Rightarrow b < a^2 \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

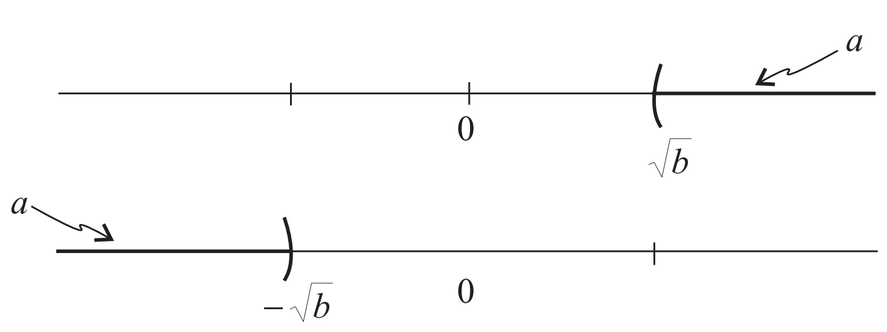
Veamos que geométricamente esto significa que:

$$\begin{aligned} a^2 < b \text{ con } b \in \mathbb{R}_+ \quad \Leftrightarrow \quad & a \text{ está a la izquierda de } \sqrt{b} \\ & a \text{ está a la derecha de } -\sqrt{b}. \end{aligned}$$



Para el otro resultado

$$\begin{aligned} b < a^2 \quad \Leftrightarrow \quad & a \text{ está a la derecha de } \sqrt{b} \\ & \text{o a la izquierda de } -\sqrt{b}, \text{ es decir} \end{aligned}$$



A manera de ejemplo resolvamos el problema:

¿Qué dimensiones debe tener un cuadrado para que su área sea menor que $100\,m^2$?

Si a es el lado del cuadrado y A es su área, sabemos que

$$a^2 = A,$$

pero además, $a^2 = A < 100$, así que

$$-\sqrt{100} < a < \sqrt{100}.$$

Pero en este problema a no puede ser menor o igual a cero, así que si $0 < a < 10$, obtendremos un cuadrado de los pedidos.

De los teoremas anteriores que hemos enunciado con "$<$", ¿cuáles son verdaderos si sustituimos "$<$" por "$\leqslant$"?

Valor Absoluto

Ahora definiremos el concepto de valor absoluto, y demostraremos algunas de sus propiedades fundamentales.

Definición 3.3.3 Dado $x \in \mathbb{R}$, el **valor absoluto** de x, el cual denotaremos como $|x|$, se define de la siguiente forma:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

De la definición de $|x|$ podemos obtener las siguientes propiedades inmediatas.

I) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |x| \in \mathbb{R}.$

II) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |x| \geq 0.$

Lo cual nos permite pensar al número $|x|$ como la distancia de cero a x o como la longitud del segmento de recta que va de cero a x.

Teorema 3.3.6 *Si $x \in \mathbb{R}$, entonces*

1. $x \leqslant |x|$.
2. $-x \leqslant |x|$.

Demostración:

1. Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces $x \geq 0$ o $x < 0$ (tricotomía).

   Si $x \geqslant 0$, entonces $|x| = x$, entonces $x \leqslant |x|$.

   Si $x < 0$, entonces $-x > 0$ y $|x| \geqslant 0 \Rightarrow |x| - x \geqslant 0 \Rightarrow |x| \geqslant x$, por lo tanto

   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant |x|.$$

2. La demostración se deja como ejercicio. ■

Como una consecuencia del teorema 3.3.6 tenemos:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant |x| \quad \text{y} \quad -|x| \leqslant x$$

entonces

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|.$$

lo cual resumimos en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.7 *Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.*

$$\begin{array}{lll} \text{Ahora si } |x| = 0, & \text{entonces } -|x| \leqslant x \leqslant |x| & \text{(teorema 3.3.7)} \\ & \text{entonces } -0 \leqslant x \leqslant 0 & \\ & \text{entonces } x = 0 & \end{array}$$

y como por definición si $x = 0$, entonces $|x| = 0$.

Podemos resumir estas observaciones en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.8

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Con lo cual tenemos que:

$$|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0.$$

Continuemos con algunas propiedades más que satisface el valor absoluto.

Teorema 3.3.9 *Sean* a, $c \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$|a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c$$

Demostración:

Observemos que si $c < 0$, $|a| \leq c$ y $-c \leq a \leq c$ son proposiciones falsas y por lo tanto es verdadera la bicondicional. Con lo que nuestro resultado se reduce a demostrar que si $a \in \mathbb{R}$ y $c \geq 0$

$$|a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c.$$

$(\Rightarrow)$ Supongamos que $|a| \leq c$, demostraremos que

$$-c \leq a \leq c.$$

Sea $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \geq 0$ o $a < 0$ (tricotomía)

I) Si $a \geq 0$ entonces $|a| = a$ y $|a| \leq c \Rightarrow a \leq c$ y como $c \geq 0 \Rightarrow$ $-c \leq 0$ y $0 \leq a \Rightarrow -c \leq a$. Entonces

$$-c \leq a \leq c$$

II) Si $a < 0$ entonces $|a| = -a$ y $|a| \leq c$

$$\Rightarrow -a \leq c$$

$$\Rightarrow -c \leq a$$

y como $a < 0$ y $0 \leq c$, entonces $a \leq c$. Entonces

$$-c \leq a \leq c.$$

Por lo tanto si $|a| \leq c$ entonces $-c \leq a \leq c$.

$(\Leftarrow)$ Ahora supongamos que $-c \leq a \leq c$, demostraremos que

$$|a| \leq c.$$

Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces $a \geq 0$ o $a < 0$.

i) Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$ y $a \leq c \Rightarrow |a| \leq c$

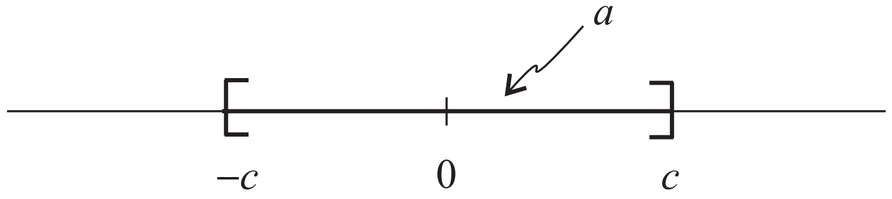
ii) Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$ y $-c \leq a \Rightarrow |a| \leq c$

Por lo tanto, si $-c \leq a \leq c$, entonces $|a| \leq c$.

Con lo cual queda demostrado nuestro teorema. ■

Para el caso en que $c > 0$ podemos dar una interpretación geométrica de este resultado.

Sabemos que si $c > 0$, entonces $-c < 0$ y que la distancia de cero a c y de cero a $-c$ es en ambos casos $|c|$ de donde



Pudiendo ser el caso de que $a = c$ o $a = -c$.

De forma análoga se puede dar la demostración del siguiente resultado.

Teorema 3.3.10 *Sean a, $c \in \mathbb{R}$, entonces*

$$|a| < c \Leftrightarrow -c < a < c.$$

De la misma forma tenemos los siguientes resultados

Teorema 3.3.11 *Sean a, $c \in \mathbb{R}$, entonces*

$$|a| \geq c \Leftrightarrow a \geq c \quad o \quad -a \geq c$$

Demostración: ($\Leftrightarrow$)

Una proposición equivalente a la que queremos demostrar es:

$$\neg(|a| \geq c) \Leftrightarrow \neg(a \geq c \text{ o } -a \geq c).$$

es decir,

$$|a| < c \Leftrightarrow (a < c \text{ y } -a < c)$$

o sea

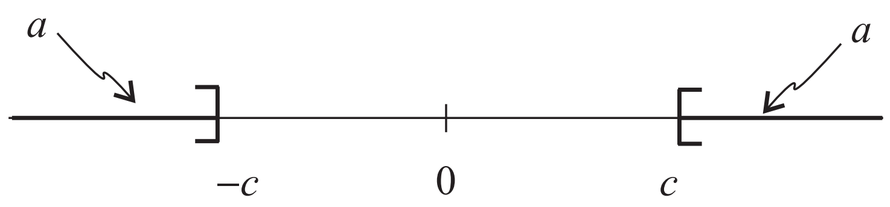
$$|a| < c \Leftrightarrow -c < a < c$$

que es precisamente la afirmación del teorema 3.3.10 , con lo cual queda demostrado nuestro teorema. ■

De este teorema podemos también dar una interpretación geométrica.

Si $c < 0$, entonces a puede ser cualquier real y puede estar por cualquier parte de la recta numérica.

Si $c > 0$



De igual manera tenemos el siguiente resultado cuya demostración se deja como ejercicio.

Teorema 3.3.12 *Sean* a, $c \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$|a| > c \Leftrightarrow a > c \quad o \quad -a > c$$

Recordemos que $\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}$, por el teorema 3.3.7

$$\left.\begin{array}{l} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{array}\right\} \Rightarrow -(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|)$$

$$\Rightarrow |x| + |y| \geq |x + y| \qquad \text{por teorema 3.3.9}$$

lo cual nos permite enunciar el siguiente resultado que hemos demostrado.

Teorema 3.3.13 $\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}, \quad |x + y| \leq |x| + |y|$.
(Este teorema es conocido como la desigualdad del triángulo)

Pudiéndose dar la igualdad en un único caso, que sería el siguiente:

Teorema 3.3.14 *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. *Entonces*

$$|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a \text{ y } b \text{ tienen signos iguales.}$$

Demostración:

($\Rightarrow$) Probaremos que si $|a+b| = |a| + |b|$ entonces a y b tienen signos iguales.

$$\begin{aligned}
|a+b| = |a| + |b| \quad &\Rightarrow |a+b|^2 = (|a| + |b|)^2 \\
&\Rightarrow |(a+b)^2| = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\
&\Rightarrow (a+b)^2 = |a^2| + 2|a||b| + |b^2| \\
&\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2|a||b| + b^2 \\
&\Rightarrow ab = |a||b| \\
&\Rightarrow ab > 0 \\
&\Rightarrow a \text{ y } b \text{ tienen signos iguales.}
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Ahora probaremos que si a y b tienen signos iguales, entonces $|a + b| = |a| + |b|$.

Si a y b tienen signos iguales, entonces

i) $a, b \in \mathbb{R}_+$.

ii) $a, b \in \mathbb{R}_-$.

i) Si $a, b \in \mathbb{R}_+$, entonces $|a| = a$ y $|b| = b$ y $a + b \in \mathbb{R}_+$

$$\Rightarrow |a+b| = a + b = |a| + |b|$$

$$\Rightarrow |a+b| = |a| + |b|.$$

ii) Si $a, b \in \mathbb{R}_-$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = -b$ y $a + b \in \mathbb{R}_-$

$$\Rightarrow |a+b| = -(a+b) = (-a) + (-b) = |a| + |b|$$

$$\Rightarrow |a+b| = |a| + |b|.$$

Por lo tanto, si a y b tienen signos iguales, entonces

$$|a+b| = |a| + |b|. \quad \blacksquare$$

Observemos que los teoremas 3.3.13 y 3.3.14 nos dicen cual es el comportamiento del valor absoluto con respecto a la suma. Dándose el caso que también podemos enunciar y demostrar un resultado que nos dice cual es el comportamiento del valor absoluto con respecto al producto.

Teorema 3.3.15 *Sean x, $y \in \mathbb{R}$, entonces $|xy| = |x||y|$.*

Demostración: Si x o y es cero, el resultado es inmediato. Por lo que lo único que nos faltar'ıa para obtener nuestro resultado es fijarse en el caso en que tanto x como y no son cero.

Sean x, $y \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces

$$x \neq 0 \Rightarrow x > 0 \quad \text{o} \quad x < 0.$$

$$y \neq 0 \Rightarrow y > 0 \quad \text{o} \quad y < 0.$$

Teniendo los siguientes cuatro casos posibles:

i) $x > 0$ y $y > 0$,

ii) $x > 0$ y $y < 0$,

iii) $x < 0$ y $y > 0$,

iv) $x < 0$ y $y < 0$,

Demostraremos que nuestra proposición se cumple en el caso i) y iii) dejando como ejercicio la demostración de ii) y iv).

i)

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow |x| = x \\ y > 0 \Rightarrow |y| = y \\ xy > 0 \Rightarrow |xy| = xy \end{array}\right\} \Rightarrow |xy| = |x||y|.$$

iii)

$$\left.\begin{array}{l} x < 0 \Rightarrow |x| = -x \\ y > 0 \Rightarrow |y| = y \\ xy < 0 \Rightarrow |xy| = -xy \end{array}\right\} \Rightarrow |xy| = |x||y|.$$

Como en cualquiera de los cuatro casos obtenemos que:

$$|xy| = |x||y|.$$

podemos concluir que: $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |xy| = |x||y|.$ ■

Ejercicios 2.

1. ¿Es cierto que si $a = b$ y $c < d \Rightarrow a - d < b - c$?
2. ¿Es cierto que si $a = b$ y $c < d \Rightarrow a - c < b - d$?
3. Demuestre: no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que si $c > 0$, entonces $x^2 + c = 0$.
4. Si $0 < a < b$ demuestre: $a < \sqrt{a\,b} < \frac{a+b}{2} < b$.

   A $\sqrt{ab}$ se le llama el promedio geométrico de a y b y a $\frac{a+b}{2}$ se le llama el promedio aritmético de a y b.
5. Demuestre que si a, $b \in \mathbb{R}$, entonces $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 = b$.
6. Demuestre que no existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq z\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
7. Demuestre que no existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq z\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
8. Demuestre $-1 < 0$.
9. Determinar cuáles son los números reales que satisfacen:

   a) $|x^2 - 6x - 2| = 0$.

   b) $|x^2 + 1| = 0$.

   c) $|4x - 6| = 3x - 7$.
10. Demostrar que si a, $b \in \mathbb{R}$, entonces:

    a) $|-a| = |a|$.

    b) $\sqrt{a^2} = |a|$.

    c) $|a - b| = |b - a|$.

    d) $|a^2| = |a|^2$.

    e) $|a - b| \leq |a| + |b|$

    f) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

    g) $a \neq 0$, $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$.

    h) $b \neq 0$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

11. Si x, $y \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces

    a) Si x, y tienen igual signo, entonces $xy \in \mathbb{R}_+$.

    b) x, $y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow xy$, $x + y \in \mathbb{R}_+$.

    c) Si x, y tienen signos contrarios, entonces $xy \in \mathbb{R}_-$.

    d) x, $y \in \mathbb{R}_- \Rightarrow\ x + y \in \mathbb{R}_-$.

12. Demostrar que $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$

13. ¿Existe $x \in \mathbb{R}$ que sea solución de la ecuación $x^6 + 2x^2 + 1 = 0$? ¿Por qué?

14. Sea $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Demostrar que si $x\ \frac{1}{x} < 2$, entonces $x < 0$

15. Pruebe que si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a}$.

16. Pruebe que si $b > a$ y $c > 0$, entonces $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b}$.

17. Si $x \neq 2$, ¿es cierto que los siguientes números están en $\mathbb{R}_+$?

    a) $\frac{x^2}{|x-2|}$, *c*) $\frac{x+2}{|x-2|}$, *e*) $\frac{x-2}{|x-2|}$,

    b) $\frac{x}{|x-2|}$, *d*) $\frac{1}{|x-2|}$,

18. Demuestre que si $a \leq r \leq a$, entonces $r = a$.

19. Si $c < 0$, ¿existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq c$ y $a \geq -c$

20. (a) Niegue ambos lados de la bicondicional:

$$a^2 < b \Leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$$

    ¿Qué teorema obtiene?

(b) Niegue ahora ambos lados de la bicondicional:

$$a^2 < b \iff a > \sqrt{b} \quad \vee \quad a < -\sqrt{b}$$

¿Qué teorema obtiene?

21. Probar los Teoremas 3.3.10 y 3.3.12.

22. Probar que

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x|^2 = x^2$$

.

Intervalos

Definimos aquí algunos conceptos que se emplean cotidianamente en los cursos de cálculo y que emplearemos en estas notas para simplificar algunas notaciones.

Intuitivamente, un intervalo de números reales está formado por todos aquellos números reales que están entre un par de números reales fijos, más precisamente:

Definición 3.3.4 Sean x, $y \in \mathbb{R}$ con $x < y$. El conjunto

$$A = \{t \in \mathbb{R} \mid x < t < y\}$$

se llama **intervalo abierto** de números reales y se denota por

$$(x,\, y) \text{ o por }]x, y[$$

Posteriormente se verá que $(x,\, y) \neq \varnothing$.

Si al conjunto A se le agragan los números x, y, al conjunto obtenido

$$\{t \in \mathbb{R} \mid x \leq t \leq y\}$$

se le llamará **intervalo cerrado** y se denotará como

$$[x,\, y]$$

Si al conjunto A le agregamos sólo un extremo, x o y. Así:

$$\{t \in \mathbb{R} \mid x \leq t < y\} = [x,\, y)$$

$$\{t \in \mathbb{R} \mid x < t \leq y\} = (x,\, y]$$

se llamarán **intervalos semicerrado** o **semiabierto**.

Conjunto de números reales de la forma:

$$\{t \in \mathbb{R} \mid x < t\}, \quad \text{y} \quad \{t \in \mathbb{R} \mid t < y\},$$

donde x, y son números reales fijos, se les llamará **intervalos infinitos** y se denotan por:

$$(x,\, \infty) \quad \text{y} \quad (-\infty,\, y)$$

respectivamente.

Si se les agrega x y y, respectivamente, se obtienen los **intervalos infinitos cerrados**;

$$[x, \infty) \quad \text{y} \quad (-\infty, y]$$

Con base en estas definiciones podemos dar una nueva interpretación de los teoremas 3.3.9 y 3.3.10.

$$|a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c \Leftrightarrow [-c, c]$$

$$|a| < c \Leftrightarrow -c < a < c \Leftrightarrow (-c, c)$$

donde $(-c, c)$ será el intervalo abierto, con centro en cero y radio c.

O sea que $|a| < c \Leftrightarrow a$ está en el intervalo abierto con centro en cero y radio c.

Ejemplos:

1. $\{t \in \mathbb{R} \,|\, 3 > t^2\} = \{t \in \mathbb{R} \,|\, -\sqrt{3} < t < \sqrt{3}\} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

2. $$\begin{aligned} \{t \in \mathbb{R} \,|\, t^2 > 3\} &= \{t \in \mathbb{R} \,|\, t > \sqrt{3} \quad \text{o} \quad -t > \sqrt{3}\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} \,|\, t < -\sqrt{3}\} \cup \{t \in \mathbb{R} \,|\, t > \sqrt{3}\} \\ &= (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty). \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \{t \in \mathbb{R} \,|\, |t-1| < 5\} &= \{t \in \mathbb{R} \,|\, -5 < t-1 < 5\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} \,|\, -4 < t < 6\} \\ &= (-4, 6). \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} (-4, 6) \cap (-1, \infty) &= \{t \in \mathbb{R} \,|\, -4 < t < 6\} \cap \{t \in \mathbb{R} \,|\, t > -1\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} \,|\, -4 < t < 6 \quad \text{y} \quad t > -1\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} \,|\, -1 < t < 6\} \\ &= (-1, 6). \end{aligned}$$

5. Sean $x_0 \in \mathbb{R}$ y $c > 0$. Recordemos que

$$\begin{aligned} |x - x_0| < c &\Leftrightarrow -c < x - x_0 \Leftrightarrow -c + x_0 < x < c + x_0 \\ &\Leftrightarrow x_0 - c < x < x_0 + c \\ &\Leftrightarrow x \in (x_0 - c, x_0 + c) \end{aligned}$$

Esto lo podemos leer de las siguientes formas, siendo todas ellas equivalentes entre si.

i) Valor absoluto de $x - x_0$ menor que c.

ii) La distancia de x a x_0 es menor que c.

iii) x está en el intervalo con centro en x_0 y radio c.

6. Sean $x_0 \in \mathbb{R}$ y $c > 0$, como

$$\begin{aligned} |x - x_0| > c &\Leftrightarrow x - x_0 > c \quad \text{o} \quad x - x_0 < -c \\ &\Leftrightarrow x > x_0 + c \quad \text{o} \quad x < x_0 - c \end{aligned}$$

que como en el caso anterior, lo podemos leer de las siguientes formas, siendo todas ellas equivalentes entre si

i) Valor absoluto de $x - x_0$ mayor que c.

ii) La distancia de x a x_0 es mayor que c.

iii) x está en el intervalo $(-\infty, x_0 - c)$ o $(x_0 + c, \infty)$.

7. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, $c > 0$ y $|x - x_0| < c$. Como

$$\begin{aligned} |x| - |x_0| \leq |x - x_0| &\Leftrightarrow |x| - |x_0| < c \\ &\Leftrightarrow |x| < c + |x_0| \end{aligned}$$

o sea, que si x está en el intervalo con centro en x_0 y radio c, entonces x está en el intervalo con centro en centro en cero y radio $c + |x_0|$.

8. Sea $x \in \mathbb{R}$, $c > 0$ y $|x - x_0| < c$. Como

$$\begin{aligned} |x_0| - |x| \leq |x_0 - x| = |x - x_0| &\Leftrightarrow |x_0| - |x| < c \\ &\Leftrightarrow |x_0| - c < |x| \end{aligned}$$

Si $|x_0| - c > 0$, entonces $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{|x_0| - c}$.

Como $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$, entonces $\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{|x_0| - c}$

O sea, que si x está en el intervalo abierto con centro en x_0 y radio c, entonces $\frac{1}{x}$ está en el intervalo abierto con centro en cero y radio $\frac{1}{|x_0| - c}$.

Inecuaciones

Nos proponemos aquí, al igual que en el caso de las ecuaciones, emplear las propiedades que hemos estudiado, para determinar el conjunto de verdad de proposiciones abiertas como:

$$|x - x_0| < 5, \quad \frac{1}{x-2} < x + 1, \quad x^2 + 3 < x - 1.$$

Ilustremos con ejemplos, cómo hallar el conjunto de verdad de este tipo de proposiciones.

Consideremos la proposición abierta

$$x + 2 < 5 + 3x$$

supongamos que $x_0 \in \mathbb{R}$. Como

$$\begin{aligned} x_0 + 2 < 5 + 3x_0 &\Leftrightarrow x_0 - 3x_0 < 5 - 2 \Leftrightarrow -2x_0 < 3 \\ &\Leftrightarrow -\tfrac{2}{3}x_0 < 1 \Leftrightarrow x_0 > -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

tenemos que $x_0 + 2 < 5 + 3x_0$ es verdadera si y sólo si $-\frac{3}{2} < x_0$ es verdadera.
Por tanto, el conjunto solución de

$$x + 2 < 5 + 3x$$

será: $\left\{t \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < t\right\} = \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Definimos aquí lo que entenderemos por inecuación y por solución de una inecuación

Definición 3.3.5 Una **inecuación** es una proposición abierta, sobre $\mathbb{R}$, en la que se encuentra el símbolo "$<$" y la variable x está operada como un número real.

En particular trabajaremos con inecuaciones de la forma

$$p(x) > q(x),$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son expresiones del tipo

$$ax+b, \quad ax^2+bx+c, \quad k, \quad |ax+b|, \quad |ax^2+bx+c|, \quad \frac{ax+b}{c_1x+d_1},$$

donde a, b, c, d, k, c_1, $d_1 \in \mathbb{R}$ y c_1 y d_1 no son simultáneamente cero. ¡Atención!. Aquí $p(x)$ y $q(x)$ no denotan proposiciones abiertas.

Definición 3.3.6 A los números reales que hagan verdadera a una inecuación, se les llamará **soluciones** de la inecuación, y al conjunto de verdad de tal inecuación se le llamará **conjunto solución** de la inecuación.

Solucionar una inecuación es hallar su conjunto solución.

En lo que sigue ilustraremos con ejemplos, la forma en que se aplican las propiedades de los números reales para solucionar una inecuación.

I. Inecuaciones del tipo

$$ax+b<cx+d.$$

El ejemplo resuelto al principio de esta sección ilustra la forma en que se obtiene el conjunto solución de este tipo de inecuaciones.

II. Inecuaciones del tipo

$$ax^2+c<dx+t.$$

En la solución de este tipo de inecuaciones emplearemos el teorema 3.3.5.

1. Sea la inecuación $x^2+5x<3x+2$.

   Sean $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_0^2+5x_0<3x_0+2 &\Leftrightarrow x_0^2+5x_0-3x_0<2 \\ &\Leftrightarrow x_0^2+2x_0+1<2+1 \\ &\Leftrightarrow (x_0+1)^2<3 \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{3}<x_0+1<\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{3}-1<x_0 \quad \text{y} \quad x_0<\sqrt{3}-1. \end{aligned}$$

Por lo tanto el conjunto solución será:

$$\begin{aligned}\{t \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3}-1 < t\} \ \cap \{t \in \mathbb{R} \mid t < \sqrt{3}-1\} \\ = (-\infty, \sqrt{3}-1) \cap (-\sqrt{3}-1, \infty) \\ = (-\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-1)\end{aligned}$$

2. Consideremos otro ejemplo de este tipo: sea la inecuación:

$$3 + 3x < x^2 - 7x + 25.$$

Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\begin{aligned}3 + 3x_0 < x_0^2 - 7x_0 + 25 &\Leftrightarrow 3 < x_0^2 - 10x_0 + 25 \Leftrightarrow 3 < (x_0 - 5)^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3} < (x_0 - 5) \quad \text{o} \quad (x_0 - 5) < -\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3} + 5 < x_0 \quad \text{o} \quad x_0 < -\sqrt{3} + 5.\end{aligned}$$

Concluimos que el conjunto solución es:

$$(\sqrt{3} + 5, \infty) \cup (-\infty, -\sqrt{3} + 5).$$

3. Un último ejemplo de este tipo. Sea la inecuación

$$-2x - 28 < x_0^2 + 8x.$$

Sean $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned}-2x_0 - 28 < x_0^2 + 8x_0 &\Leftrightarrow -28 < x_0^2 + 10x_0 \\ &\Leftrightarrow -28 + 25 < x_0^2 + 10x_0 + 25 \\ &\Leftrightarrow -3 < (x_0 + 5)^2\end{aligned}$$

Aquí no es aplicable el teorema 3.3.5 ya que $-3 < 0$, pero como el cuadrado de cualquier número real es mayor o igual que cero, para toda $x \in \mathbb{R}$, $-3 < 0 \leq (x + 5)^2$. Por lo tanto, el conjunto solución es $\mathbb{R}$.

III. Inecuaciones que involucran el valor absoluto.

Para solucionar este tipo de inecuaciones usaremos los teoremas 3.3.10 y 3.3.12.

Afirmamos que apoyándonos en estos teoremas, la solución de inecuaciones que involucran valor absoluto, se reduce a resolver inecuaciones del

tipo que ya hemos estudiado.

Igual que en los casos anteriores, ilustraremos con ejemplos la validez de esta afirmación.

Ejemplos:

como sabemos, dado $x_0, r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$, los x que cumplan la inecuación o desigualdad

$$|x - x_0| < r,$$

se pueden interpretar de las siguientes formas, siendo ellas equivalentes entre sí:

(i) Los $x \in \mathbb{R}$, tales que la distancia

(ii) Los $x \in \mathbb{R}$ que están en el intervalo abierto con centro x_0 y radio menor que r.

En los siguientes ejemplos usaremos alguna de estas interpretaciones para plantear el problema dado.

1. Encontrar los $x \in \mathbb{R}$ tal que la distancia de $4x$ a 2 sea menor que 1.

   Por el inciso (i), concluimos que $x_0 = 2$ y $r = 1$. De donde podemos observar que debemos resolver la inecuación: $|4x - 2| < 1$.

   Aplicamos el Teorema 3.3.10 y tenemos:

   $|4x - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < 4x - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < 4x < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \Leftrightarrow x \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

2. Encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $5x$ esté en el intervalo abierto con centro $\frac{5}{3}$ y radio $\frac{1}{2}$.

   Aplicando el inciso (ii), podemos ver que $x_0 = \frac{5}{3}$ y $r = \frac{1}{2}$. De donde observamos que debemos resolver la inecuación: $|5x - \frac{5}{3}| < \frac{1}{2}$, Una ves más, aplicando el teorema 3.3.10, tenemos que:
   $|5x - \frac{5}{3}| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < 5x - \frac{5}{3} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{3} - \frac{1}{2} < 5x < \frac{5}{3} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{7}{6} < 5x < \frac{13}{6} \Leftrightarrow \frac{7}{30} < x < \frac{13}{30} \Leftrightarrow x \in (\frac{7}{30}, \frac{13}{30})$.

De donde las x que satisfacen que $5x$ está en el intervalo abierto con centro en $\frac{5}{3}$ y radio $\frac{1}{2}$ son las $x \in \left(\frac{7}{30}, \frac{13}{30}\right)$.

3. Encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que la distancia de x^2 a 4 sea menor que $\frac{1}{4}$.

   Como en el ejemplo (1) aplicando el inciso (I) tenemos que $x_0 = 4$ y $r = \frac{1}{4}$, y lo que deseamos resolver es la inecuación $|x^2 - 4| < \frac{1}{4}$.

   Aplicando el teorema 3.3.10, se tiene que: $|x^2 - 4| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < x^2 - 4 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{4} < x^2 < \frac{1}{4} + 4 \Leftrightarrow \frac{15}{4} < x^2 < \frac{17}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{4}} < |x| < \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{4}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{15}}{2} < |x| < \frac{\sqrt{17}}{2}$.

   Ahora si $x \geq 0$, $|x| = x$, entonces $\frac{\sqrt{15}}{2} < |x| < \frac{\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{15}}{2} < x < \frac{\sqrt{17}}{2}$.

   Y si $x < 0$, $|x| = -x$, entonces $\frac{\sqrt{15}}{2} < |x| < \frac{\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{17}}{2} < x < -\frac{\sqrt{15}}{2}$.

   Por lo tanto, las x que satisfacen que la distancia de x^2 a 4 es menor que $\frac{1}{4}$ son las $x \in \left(-\frac{\sqrt{17}}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$.

4. Encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que la distancia de x^2 a 9 sea menor que $\frac{1}{9}$.

   Aplicando el inciso (I) tenemos que $x_0 = 9$ y $r = \frac{1}{9}$, de donde observamos que lo que debemos resolver es la inecuación $|x^2 - 9| < \frac{1}{9}$. Una vez más aplicando el teorema 3.3.10 tenemos que: $|x^2 - 9| < \frac{1}{9} \Leftrightarrow -\frac{1}{9} < x^2 - 9 < \frac{1}{9} \Leftrightarrow 9 - \frac{1}{9} < x^2 < \frac{1}{9} + 9 \Leftrightarrow \frac{80}{9} < x^2 < \frac{82}{9} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{9}} < |x| < \frac{\sqrt{82}}{\sqrt{9}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{80}}{3} < |x| < \frac{\sqrt{82}}{3}$.

   Ahora si $x \geq 0$, entonces $\frac{\sqrt{80}}{3} < |x| < \frac{\sqrt{82}}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{80}}{3} < x < \frac{\sqrt{82}}{3}$. Y si $x < 0$, entonces $\frac{\sqrt{80}}{3} < |x| < \frac{\sqrt{82}}{3} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{82}}{3} < x < -\frac{\sqrt{80}}{3}$.

   Por lo tanto, las x que satisfacen que la distancia de x^2 a 9 es menor que $\frac{1}{9}$ son las

$$x \in \left(-\frac{\sqrt{82}}{3}, -\frac{\sqrt{80}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{80}}{3}, \frac{\sqrt{82}}{3}\right).$$

5. Observemos que, del inciso (II), para determinar un intervalo con centro en un punto en x_0, lo único que debemos de dar es su radio.

Encontrar el radio del intervalo con centro en $\frac{1}{2}$, tal que si x está en este intervalo entonces $4x$ está en el intervalo con centro 2 y radio 1.

Lo anterior se traduce en encontrar $r > 0$, tal que:

$$\text{si } |x - \tfrac{1}{2}| < r, \text{ entonces } |4x - 2| < 1|,$$

o dicho de otra forma, encontrar $r > 0$ tal que

$$|4x - 2| < 1| \text{ si } |x - \tfrac{1}{2}| < r.$$

En este caso debemos encontrar las x que satisfagan que $|4x-2| < 1|$ sujetas a la condición que $|x-\frac{1}{2}| < r$. Ahora del ejemplo (1) tenemos que

$$|4x - 2| < 1| \Leftrightarrow x \in \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}\right).$$

Sin embargo de estas x sólo nos interesan las que satisfagan que $|x - \frac{1}{2}| < r$. Podemos observar que $\frac{1}{2} \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, y en este caso particular resulta ser el centro de tal intervalo, por lo que tomando $r = \frac{1}{4}$, tenemos que

$$\text{si } |x - \tfrac{1}{2}| < \tfrac{1}{4} \Rightarrow |4x - 2| < 1$$

6. Encontrar el radio del intervalo con centro en -2 tal que si x está en él, entonces x^2 está en el intervalo con centro en 4 y radio $\frac{1}{4}$.

   Lo anterior lo podemos escribir como

   $$|x - (-2)| < r \Rightarrow |x^2 - 4| < \tfrac{1}{4}.$$

   Una vez más nos interesa encontrar las x que satisfagan que: $|x^2 - 4| < \frac{1}{4}$ con la condición de que $|x - (-2)| < r$.

   Ahora, del ejemplo (3) tenemos que

   $$|x^2 - 4| < \tfrac{1}{4} \Leftrightarrow x \in \left(-\tfrac{\sqrt{17}}{2}, -\tfrac{\sqrt{15}}{2}\right) \cup \left(\tfrac{\sqrt{15}}{2}, \tfrac{\sqrt{17}}{2}\right).$$

y podemos observar que $-2 \in \left(-\frac{\sqrt{17}}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$. Así que, tomando $r = min\{r_1, r_2\}$ donde $r_1 = -\frac{\sqrt{15}}{2} + 2$ y $r_2 = -2 + \frac{\sqrt{17}}{2}$ tenemos que

$$|x - (-2)| < r \Rightarrow |x^2 - 4| < \tfrac{1}{4}.$$

7. Sea la inecuación $|3x + 2| < x - 5$

   Si $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |3x_0 + 2| < x_0 - 5 &\Leftrightarrow -(x_0 - 5) < 3x_0 + 2 < x_0 - 5 \\ &\Leftrightarrow -(x_0 - 5) < 3x_0 + 2 \quad \text{y} \quad 3x_0 + 2 < x_0 - 5 \\ &\Leftrightarrow 5 < 4x_0 + 2 \quad \text{y} \quad 2x_0 < -7 \\ &\Leftrightarrow 3 < 4x_0 \quad \text{y} \quad x_0 < -\tfrac{7}{2} \\ &\Leftrightarrow \tfrac{3}{4} < x_0 \quad \text{y} \quad x_0 < -\tfrac{7}{2} \end{aligned}$$

   Esta última proposición $\left(\frac{3}{4} < x_0 \text{ y } x_0 < -\frac{7}{2}\right)$ es falsa, cualquiera que sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Por tanto el conjunto solución de la inecuación es el conjunto vacío.

8. Sea la inecuación $|3x - 1| < 2x + 5$.

   Si $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |3x_0 - 1| < 2x_0 + 5 &\Leftrightarrow -(2x_0 + 5) < 3x_0 - 1 < 2x_0 + 5 \\ &\Leftrightarrow -2x_0 - 5 < 3x_0 - 1 \text{ y } 3x_0 - 1 < 2x_0 + 5 \\ &\Leftrightarrow -2x_0 - 5 < 3x_0 - 1 \text{ y } 3x_0 - 1 < 2x_0 + 5 \\ &\Leftrightarrow -4 < 5x_0 \quad \text{y} \quad x_0 < 6 \\ &\Leftrightarrow -\tfrac{4}{5} < x_0 \quad \text{y} \quad x_0 < 6 \end{aligned}$$

   Por tanto el conjunto solución de la ecuación es

$$\left(-\frac{4}{5}, \infty\right) \cap (-\infty, 6) = \left(-\frac{4}{5}, 6\right)$$

9. Sea la inecuación $2x - 3 < |x + 5|$ Si $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 2x_0 - 3 < |x_0 + 5| &\Leftrightarrow 2x_0 - 3 < x_0 + 5 \text{ o } 2x_0 - 3 < -(x_0 + 5) \\ &\Leftrightarrow -8 < -x_0 \quad \text{o} \quad 3x_0 < -2 \\ &\Leftrightarrow x_0 < 8 \quad \text{o} \quad x_0 < -\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

así que el conjunto solución es $(-\infty, 8) \cup \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) = (-\infty, 8)$

10. Resolvamos la inecuación $|x^2 - 5x + 6| < 2x + 1$.
Si $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$|x_0^2 - 5x_0 + 6| < 2x_0 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad -(2x_0 + 1) < x_0^2 - 5x_0 + 6 < 2x_0 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -7 < x_0^2 - 3x_0 \quad \text{y} \quad x_0^2 - 7x_0 < -5$$

$$\Leftrightarrow \quad -7 < x_0^2 - 3x_0 + \tfrac{9}{4} - \tfrac{9}{4} \text{ y } x_0^2 - 7x_0^2 + \tfrac{49}{4} - \tfrac{49}{4} < -5$$

$$\Leftrightarrow \quad -\tfrac{19}{4} < \left(x_0 - \tfrac{3}{2}\right)^2 \quad \text{y} \quad \left(x_0 - \tfrac{7}{2}\right)^2 < \tfrac{29}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x_0 - \tfrac{7}{2}\right)^2 < \tfrac{29}{4} \text{ (la desigualdad } -\tfrac{19}{4} < \left(x_0 - \tfrac{3}{2}\right)^2 \text{ se cumple para todo real } x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x_0 - \tfrac{7}{2}\right) < \tfrac{\sqrt{29}}{2} \quad \text{y} \quad -\tfrac{\sqrt{29}}{2} < x_0 - \tfrac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x_0 - \tfrac{7}{2}\right) < \tfrac{\sqrt{29}}{2} \quad \text{y} \quad x_0 < \tfrac{1}{2}\left(7 + \sqrt{29}\right)$$

El conjunto solución es el intervalo $\left(\frac{1}{2}(7 - \sqrt{29}), \frac{1}{2}(7 + \sqrt{29})\right)$.

11. Ahora la inecuación $|3x^2 + 5x - 2| < -(x^2 + 5)$.

Vemos que un simple análisis de $x^2 + 5$ nos lleva a concluir que $-(x^2 + 5) \leq 0$, así que los $x \in \mathbb{R}$ que resolvieran la inecuación, cumplirá que

$$|3x^2 + 5x - 2| < -(x^2 + 5) \leq 0.$$

Pero esto no puede cumplirse para ningún número real, así que el conjunto solución de la inecuación es el conjunto vacío.

12. Sea la inecuación $\frac{3x+1}{x^2-1} < 8$.

    Sean $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces

    $$\frac{3x_0+1}{x_0^2-1} < 8$$

    $$\Leftrightarrow \frac{3x_0+1}{x_0^2-1} < 8 \text{ y } (x_0^2 - 1 < 0 \text{ o } x_0^2 - 1 > 0 \text{ o } x_0^2 - 1 = 0)$$

    $$\Leftrightarrow \left(\frac{3x_0+1}{x_0^2-1} < 8 \text{ y } x_0^2 - 1 < 0\right) \text{ o } \left(\frac{3x_0+1}{x_0^2-1} < 8 \text{ y } x_0^2 - 1 > 0\right)$$

    $$\text{o } \left(\frac{3x_0+1}{x_0^2-1} < 8 \text{ y } x_0^2 - 1 = 0\right)$$

    $$\Leftrightarrow \left(\frac{3x_0+1}{x_0^2-1} < 8 \text{ y } x_0^2 - 1 < 0\right) \text{ o } \left(\frac{3x_0+1}{x_0^2-1} < 8 \text{ y } x_0^2 - 1 > 0\right)$$

    (ya que la proposición $\frac{3x_0+1}{x_0^2-1} \in \{t \in \mathbb{R} \mid t < 8\}$ y $x_0^2 - 1 = 0$

    es una contradicción)

    $$\Leftrightarrow (3x_0 + 1 > 8x_0^2 - 8 \text{ y } (x_0^2 - 1) < 0)$$

    $$\text{o } (3x_0 + 1 < 8x_0^2 - 8 \text{ y } x_0^2 - 1 > 0)$$

    Hemos llevado nuestra inecuación original a inecuaciones de tipos ya conocidos. Dejamos que el estudiante concluya el ejemplo, usando los métodos para resolver las inecuaciones del tipo II.

Ejercicios 3.

1. ¿Es $(-1, 2) \cup (3, 5)$ un intervalo?

2. Demuestre que

   a) Si $x \in [2, 4]$, entonces $2x + 3 \in [7, 11]$.

b) Si $x \in (2,\, 4)$, entonces $\frac{1}{2x+3} \in \left[\frac{1}{11},\, \frac{1}{7}\right]$.

3. Demuestre que si $x - 5 \in [-2,\, 2]$, entonces $x \in [3,\, 7]$.

4. Pruébese que si la intersección de dos intervalos abiertos no es el conjunto vacío, entonces dicha intersección es un intervalo abierto.

5. Si $[a,\, b] \subseteq [c,\, d]$, demuestre que $c \leq a$ y $b \leq d$ y si $(a,\, b) \subseteq (c,\, d)$, entonces $c \leq a$ y $b \leq d$.

6. Resuelva las siguientes desigualdades lineales

$$4x + 1 < 2x + 3.$$

$$11x - 7 < 4x + 2.$$

7. Resuelva las siguientes desigualdades cuadráticas

$$x^2 - 5x + 6 < 0.$$

$$2x^2 - x > 10.$$

$$3x^2 < 7x - 4.$$

8. Resuelva las siguientes inecuaciones

$$|2x + 5| > 3.$$

$$|5x - 3| < 7.$$

$$|x + 2| < 2x.$$

$$|x^2 - 4| < -2x + 4.$$

9. Pruebe que $|x - 3| < 1 \Leftrightarrow 6 < x + 4 < 8$

10. Resuelva las siguientes inecuaciones

a) $\frac{3x-2}{x+1} < 4.$

b) $\frac{4}{14x} < \frac{2}{1-x}.$

c) $|x^2 - 3x + 1| < |x + 2|.$

11. Sean x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$ y $r > 0$.

    Si la distancia de x a x_0 es menor que r y la distancia de y a y_0 es menor que r. Pruebe que la distancia de $(x + y)$ a $(x_0 + y_0)$ es menor que $2r$.

12. Sean x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$

    Si y está en el intervalo con centro en y_0 y radio r y x está en el intervalo con centro en x_0 y radio r. Pruebe que (xy) está en el intervalo con centro en (x_0y_0) y radio $r(|x_0| + |y_0| + r)$.

§4

3.4. El Axioma del Supremo

En la sección 3.1 dividimos los axiomas que satisface el conjunto de todos los números reales, con la suma, con el producto y la relación de orden, en tres grupos: axiomas de campo, axiomes de orden y el axioma del supremo. Entre aquella sección y la que ahora comenzamos hemos trabajado con los dos primeros grupos de axiomas, sin tocar para nada el axioma del supremo, Ahora es el momento de aclarar su escueto enunciado que, como se recordará, señala:

Axioma del supremo: Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $A \neq \varnothing$ y A está acotado superiormente, entonces A tiene supremo.

Definición 3.4.1 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$

(1) Si $x_0 \in \mathbb{R}$ diremos que x_0 es una cota superior de A si

$$\forall\, a \in A: \qquad a \leq x_0$$

(2) Diremos que A está acotado superiormente si existe una cota superior de A.

Ejemplos:

1. Sea $A = \{-2, -1.5, 0, 1, 1.5, 2\}$. Entonces 2 es una cota superior de A porque es mayor o igual que cualquier otro elemento de A. En general, si A es un conjunto finito, el mayor de sus elementos es una cota superior de A.

2. Sean a, $b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

   $A = (a, b)$ como $\forall\, x \in A$, $a < x < b$, entonces b es cota superior de A.

3. $B = [a, b]$ como $\forall\, x \in B$, $a \leq x \leq b$, entonces b es cota superior de B.

4. Supongamos que $A = (2, 3)$. Como vimos en el Ejemplo 2, 3 es una cota superior de A. Pero $\pi, 3.5, 4, 5, \sqrt{10}$ y cualquier otro número mayor que 3 también son cotas superiores de A.

   En general, dados un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y una cota superior, x_0, de A, cualquier $y \in \mathbb{R}$ mayor que x_0 también es una cota superior de A (ver ejercicio 3 de Ejercicios 4).

5. Sean $A = \emptyset$. Demostraremos que cualquier número real es una cota superior de A. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces es verdadera la proposición $\forall\, x \in \emptyset : a \leq x_0$ (¿Por qué?).

Como se deduce de los ejemplos anteriores, cuando un conjunto A de números reales está acotado superiormente, el conjunto de todas sus cotas superiores es infinito. En el caso de que $A = \emptyset$, dicho conjunto de cotas superiores es $\mathbb{R}$ y sabemos, por el ejercicio 2 (7), que no existe el número real "más pequeño" de todos. Entonces no existe "la menor" de las cotas superiores de $\emptyset$. Ahora bien, si $A \neq \emptyset$, entonces A tiene elementos de A. Entonces tiene sentido preguntarnos si existe una cota superior más pequeña que todas las demás: una "mínima cota superior" de A. Cuando existe una mínima cota superior de A suele dársele un nombre especial.

Definición 3.4.2 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Diremos que x_0 es un supremo de A, si se cumplen

s_1) x_0 es cota superior de A.

s_2) Si m es cota superior de A, entonces $x_0 \leq m$.

Entonces un supremo del conjunto A es una cota superior con la propiedad adicional s_2). Esto nos permite demostrar su unicidad, es decir, que en contraste con el concepto de cota superior un conjunto A puede tener a lo más un supremo.

Teorema 3.4.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}$ y x_0, y_0 supremos de A. Entonces $x_0 = y_0$.*

Demostración: Que x_0 y y_0 sean supremos de A significa que ambos satisfacen s_1) y s_2). Así, como x_0 satisface s_1) y y_0 satisface s_2), $y_0 \leq x_0$; pero, como y_0 satisface s_1), $x_0 \leq y_0$. Por consiguiente $x_0 = y_0$. ■

Entonces, si un conjunto A tiene un supremo x_0, ya le podemos llamar **el supremo de** A (con el artículo determinado **el**) y representarlo de cierta forma:

La preposición "x_0 es el supremos d A"se denotará $x_0 = \sup A$. En algunos libros suelen referirse al supremo como la "mínima cota superior". En particular, en los de habla inglesa, el supremo de A es "The least upper bound of A" y se denota por $lub\, A$.

Como veremos en secciones posteriores, hay muchos campos ordenados, es decir, conjuntos que, con una suma y un producto, y con una relación de orden, satisfacen axiomas como los de campo y de orden que se cumplen para $\mathbb{R}$. Por ejemplo, el conjunto de los números racionales (que se estudiará en la sección 3.6), con su suma, producto y orden usuales, es un campo ordenado; pero en dicho campo (y en muchos otros) no se cumple que todo subconjunto no vacío del campo, que esté acotado superiormente, tiene un supremo. Esto significa que el axioma del supremo no es una propiedad que pueda demostrarse a partir de los axiomas de campo y de orden. Si queremos que esta propiedad la cumplan los reales

–y ¡claro que queremos!, pues con ella se podrá demostrar la existencias de raíces cuadradas y de números irracionales, entre otras cosas–, se debe presentar como un nuevo axioma. Lo enunciaremos otra vez, con la seguridad de que el elector ya entiende cada concepto mencionado:

Axioma del supremo: Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $A \neq \varnothing$ y A está acotado superiormente, entonces existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $x_0 = \sup\ A$.

Ejemplos:

1. Sea $B = [2, 3]$. Sabemos ya que 3, y todo número mayor que 3, son cotas superiores de B. Intuitivamente, es claro que 3 es la menor de las cotas superiores de B, así que proponemos que $3 = \sup\ B$.

   Para demostrar esto solo resta probar la propiedad s_2), lo cual es sencillo:

   Sea m una cota superior de B. Entonces, para cada $b \in B$, $b \leq m$, $3 \leq m$ y ya.

2. Sea $A = (2, 3)$. En esta caso también demostraremos que $3 = \sup\ A$. Ya Sabemos que 3 es un cota superior de A. Para ver que se cuple s_2), tendríamos que demostrar que, dado $m \in \mathbb{R}$, entonces

   $$m \text{ es una cota superior de } A \Rightarrow 3 \leq m$$

   Pero en este caso conviene demostrar la contrarrecíproca de dicha implicación:

   $$m < 3 \Rightarrow m \text{ no es una cota superior de } A$$

   Para demostrarla, supongamos que $m < 3$. Entonces

   (I) Si $m \leq 2, 2.5 \in A$ y $m < 2.5$. Esto demuestra que m no es una cota superior de A.

   (II) Si $m > 2$, por Ejercicios 2 (4), el promedio aritmético de m y 3, $x_0 = \frac{m+3}{2}$, está entre m y 3, así que

   $$2 < m < x_0 < 3$$

   Gracias a esto podemos asegurar que $x_0 \in A$ y que $m < x_0$, lo cual implica que m no es una cota superior de A.

3. $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$, entonces $\sup \mathbb{R}_- = 0$ (ejercicio).

4. Si A es un conjunto que no está acotado superiormente, entonces A no tiene supremo, porque el supremo sería una cota superior de A.

5. $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, entonces $\mathbb{R}_+$ no tiene supremo (¿por qué?).

6. Sea $A = \left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{0, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \ldots\right\}$
$= \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}$
Claramente $A \neq 0$ y $1 - \frac{1}{n} < 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, así que $A \neq 0$ y está acotado superiormente. Por el axioma del supremo, A tiene supremo.
Todavía no hemos desarrollado la teoría necesaria para saber quién es exactamente el supremo de A, pero el axioma del supremo nos permite saber que sí existe.

Demostraremos algunas propiedades relacionadas con el supremo.

Teorema 3.4.2 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, A acotado superiormente, $a_0 = \sup A$, entonces*
$\forall\, r \in \mathbb{R}_+\ \exists\, a \in A$ *tal que* $a_0 - r < a \leq a_0$.

Demostración: Sea $r > 0$. Entonces $a_0 - r < a_0$ y por s_2), $a_0 - r$ no es una cota superior de A, así que existe $a \in A$ tal que $a_0 - r < a$. ■

Corolario 3.4.3 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, A acotado superiormente y $a_0 = \sup A$. Entonces*

$$\forall\, r > 0,\ \exists\, a \in A \text{ tal que } |a - a_0| < r.$$

Demostración: Sea $r > 0$. Por el Teorema 3.4.2, existe $a \in A$ tal que $a_0 - r < a \leq a_0$. Por consiguiente $a_0 - r < a < a_0 + r$. Es decir, $-r < a_0 < r$ lo cual equivale a $|a - a_0| < r$. ■

Lo cual podemos interpretar de la siguiente forma:

Si a_0 es el supremo de A, entonces en cualquier intervalo abierto con centro a_0 y radio r, siempre hay elementos del conjunto.

Las demostraciones que dimos de que $3 = \sup(2,3)$ y de que $3 = \sup[2,3]$, son esencialmente diferentes porque, en el primer caso 3 no es elemento de $(2,3)$ y en el segundo caso 3 sí es elemento de $[2,3]$. Este caso fue más sencillo porque existió un elemento más grande en el conjunto (el 3). En general, si un conjunto tiene un elemento mayor, es fácil demostrar que ese mismo elemento será el supremo del conjunto. Antes de que enunciemos este hecho como un teorema, bauticemos formalmente al elemento mayor del conjunto.

Definición 3.4.3 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, si existe $x_0 \in \mathbb{R}$, Diremos que x_0 es un **máximo** de A si se cumplen:

$M_1)$ x_0 es una cota superior de A.

$M_2)$ $x_0 \in A$

Como en el caso del supremo, un conjunto A no puede tener más de un máximo (ejercicio), así que hablaremos de "el máximo de A" y le daremos una notación especial: $A \subset \mathbb{R}$, si existe $x_0 \in \mathbb{R}$, a la proposición "x_0 es el máximo de A" la representaremos con: $x_0 = \max A$.

Teorema 3.4.4 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ y $x_0 = max\, A$, entonces*

$$\sup A = x_0$$

Demostración: Como $x_0 = \max A$, por $M_1)$ x_0 es una cota superior de A. Para demostrar s_2, sea m cualquier cota superior de A. Entonces m es mayor o igual que cualquier elemento de A. Como $x_0 \in A$, $m \geq x_0$. ■
Ejemplos:

1. Como $3 = \sup(2,3)$, pero $3 \notin (2,3)$, entonces 3 no es el máximo de $(2,3)$. El conjunto (2,3) no tiene máximo, porque si lo tuviera, por el Teorema 3.4.4, sabríamos que este máximo sería el supremo, o sea 3, pero como ya vimos, 3 no puede ser el máximo del conjunto. Entonces un conjunto puede tener supremo pero no máximo.

2. Sea $A = \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{R}$. El máximo de este conjunto es el mayor de los tres elementos.

3. Si $A = \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, entonces A no tiene máximo. En efecto, si existiera $x_0 = \max A$, entonces, como $x_0 \in A$, existiría $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 = 1 - \frac{1}{n}$. Pero
$n + 1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow x_0 < 1 - \frac{1}{n+1}$ y $1 - \frac{1}{n+1} \in A$, esto último es una contradicción porque x_0 es una cota superior de A.

En forma análoga a los conceptos de cota superior, supremo y máximo de un conjunto tenemos los conceptos simétricos de cota inferior, ínfimo y mínimo de un conjunto y los correspondientes teoremas.

Definición 3.4.4 $A \subseteq \mathbb{R}$

(1) si $y_0 \in \mathbb{R}$, diremos que y_0 es una cota inferior de A si
$$\forall\, a \in A : y_0 \leq a.$$

(2) Diremos que A está acotado inferiormente, si existe una cota inferior de A.

Definición 3.4.5 Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Diremos que y_0 es un ínfimo de A si se cumplen:

I) y_0 es cota inferior de A.

II) si m es una cota inferior d A, entonces $y_0 \geq m$.

Coloquialmente, un ínfimo de A es una máxima cota inferior de A, De hecho, éste es otro nombre que suele dársele a un ínfimo.

También puede demostrarse que un conjunto no puede tener más de un ínfimo:

Teorema 3.4.5 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y x_0, y_0 ínfimos de A. Entonces $x_0 = y_0$.*

Demostración: Ejercicio 4 (11). ■

Si un conjunto A tiene un ínfimo y_0, a y_0 se le llama el ínfimo de A y la proposición ""y_0 es el ínfimo de A" se $y_0 = \text{ínf}\, A$.

La propiedad simétrica expresada en el axioma del supremo sería el "axioma del ínfimo", se puede demostrar usando el axioma del supremo y, por lo tanto, ya no es un axioma, sino el siguiente teorema:

Teorema 3.4.6 *Si $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ y A está acotado inferiormente, entonces A tiene ínfimo.*

Demostración: Sea $A \neq \varnothing$ y A acotado inferiormente, entonces $\exists y \in \mathbb{R}$ tal que

$$y \leq a \quad \forall\, a \in A \Leftrightarrow -a < -y \forall a \in A$$

definamos $B = \{-a | a \in A\}$. Como $-a < -y \forall a \in A$, entonces B es acotado superiormente y $A \neq \varnothing$ implica $B \neq \varnothing$.

Entonces, por el axioma del supremo $\exists a_0 \in \mathbb{R}$ tal que $a_0 \sup B$.

Demostraremos que $-a_0$ es el ínfimo de A. Para eso veremos que $-a_0$ satisface I_1) e II_2) de la definición de ínfimo.

I') Como

$$a_0 = \sup B \Rightarrow -a \leq a_0 \quad \forall a \in A$$
$$\Rightarrow -a_0 \leq a \quad \forall a \in A$$

II') Supongamos que y_0 es cota inferior de A tal que $-a_0 < y_0$ como y_0 es cota inferior de A, $y_0 \leq a \quad \forall a \in A \Leftrightarrow -a \leq -y_0 \Rightarrow -y_0$ es cota superior de $-A = \{-a | a \in A\}$ y $y_0 < a_0$ lo cual es una contradicción.

$$\therefore -a_0 = \text{ínf}\, A. \qquad \blacksquare$$

Algunos ejemplos de cotas inferiores e ínfimos se describirán en los ejercicios. Mientras, enunciaremos otras propiedades del ínfimo de un conjunto.

Teorema 3.4.7 *Si $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, A está acotado inferiormente y $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que $a_0 = \text{ínf}\, A$, entonces*

$$\forall\, r > 0, \exists\, a \in A : a_0 \leq a < a_0 + r.$$

Demostración: Se deja como ejercicio. $\blacksquare$

Corolario 3.4.8 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, A está acotado inferiormente y $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que $a_0 = \acute{i}nf(A)$. Entonces*

$$\forall\, r > 0, \quad \exists\, a \in A : \quad |a - a_0| < r$$

Demostración: Ejercicio. ■

Este resultado lo podemos interpretar de la siguiente forma:

Si a_0 es el ínfimo de A, entonces cualquier intervalo abierto con centro en a_0 y radio r, hay elementos de A.

Existe el concepto simétrico al concepto de máximo de un conjunto.

Definición 3.4.6 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $a_0 \in \mathbb{R}$ diremos que a_0 es un **mínimo** de A si se cumplen

$m_1)$ a_0 es una cota inferior de A

$m_2)$ $a_0 \in A$

Por supuesto en este caso también hay unicidad: si un conjunto A tiene un mínimo, éste es el único número real que satisface $m_1)$ y $m_2)$. Por eso se habla de "el mínimo de A" y la proposición "a_0 es el mínimo de A" se representa como: $a_0 = \min A$

Teorema 3.4.9 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ y $x_0 = \acute{m}in\, A$, entonces*

$$\acute{i}nf(A) = x_0.$$

Demostración: Ejercicio. ■

como se verá en los ejercicios, un conjunto puede tener un ínfimo y no tener mínimo, así que estos dos conceptos son diferentes.

Una última definición.

Definición 3.4.7 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que A es **acotado** si y sólo si A es acotado superior e inferiormente.

Ejercicios 4.

1. ¿Cuál es el máximo de $(2,3) \cup \{4\}$? ¿Cuál es el supremo?

2. Demuestre que si $A \subset \mathbb{R}$, x_0 es una cota superior de A y $y > x_0$, entonces y también es una cota superior de A.

3. Sean I, J dos intervalos tales que $I \cap J \neq \varnothing$.

   (a) Probar que $I \cap J$ es un intervalo que sí tiene más de un punto.

   (b) Dé un ejemplo que muestre que $I \cap J$ puede ser un conjunto de un solo punto.

   (c) Suponga que I y J son intervalos abiertos y acotados. Probar que $I \cap J$ es un intervalo abierto acotado.

   (d) Dar un ejemplo de intervalos semi-abiertos I y J tales que $I \cap J$ sea un intervalo cerrado.

4. Sean $A = (a,b)$ y $B = [a,b]$, donde $a < b$. Demuestre que $a = \text{ínf}\, A = \text{ínf}\, B$.

5. Si $\sup A = \sup B$ e $\text{ínf}\, A = \text{ínf}\, B$. ¿Es cierto que $A = B$?

6. Si $\sup A = \text{ínf}\, A$. ¿Qué puede decir acerca del conjunto A?

7. Si $A \neq \varnothing$ y acotado tal que $\text{ínf}\, A > 0$, entonces pruebe que $\sup\{\frac{1}{a} : A\} = \frac{1}{\text{ínf}\, A}$

8. Demuestre que el ínfimo de un conjunto A no necesariamente es un elemento del conjunto A (Dé un ejemplo).

9. Demuestre que el ínfimo de un conjunto de cotas inferiores de $\varnothing$ es $\mathbb{R}$, pero $\varnothing$ no tiene ínfimo.

10. ¿Tiene mínimo un conjunto finito? ¿Cuál sería?

11. Pruebe que $0 = \sup \mathbb{R}_-$, pero que $\mathbb{R}_-$ no tiene ínfimo.

12. Compruebe que $\mathbb{R}_+$ no tiene supremo ¿tiene ínfimo?

13. Demuestre que el conjunto $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ tiene ínfimo pero no tiene mínimo.

14. Demuestre que $A \subseteq \mathbb{R}$ tien a lo más un máximo, tiene a lo más un mínimo y tiene a lo más un ínfimo.

15. Si A y B están acotados superiormente, demuestre que

$$A \cup B \quad \text{y} \quad A \cap B \text{ están acotados superiormente.}$$

16. Si $A \neq \varnothing \neq B$ y A y B están acotados superiormente, entonces

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

17. Si $A \neq \varnothing \neq B$ y A y B están acotados superiormente y $A \cap B \neq \varnothing$, entonces

$$\sup(A \cap B) \leq \text{mín}\{\sup A, \sup B\}.$$

18. Si $A \neq \varnothing \neq B$, acotados superiormente y $A \subseteq B$, entonces

$$\sup A \leq \sup B.$$

19. Si $A \neq \varnothing \neq B$, acotados inferiormente y $A \subseteq B$, entonces

$$\text{ínf}\, A \geq \text{ínf}\, B.$$

20. Si A está acotado, existen a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$ tales que $A \subseteq [a_1, a_2]$.

21. Si A y B están acotados, ¿qué puede decir de $A - B$?

22. A acotado superiormente $\Leftrightarrow \mathbb{R} - A$ acotado inferiormente, ¿es siempre verdadera?

23. Demuestre el Teorema 3.4.7

24. Demuestre el Corolario 3.4.8

25. Demuestre el Teorema 3.4.9

26. Sean $A, \subseteq \mathbb{R}$ y $-A = \{-a : a \in A\}$ Demuestre que

    (a) A está acotado inferiormente sí y solo sí $-A$ está acotado superiormente

    (b) $x_0 = \text{ínf}\, A$ sí y solo sí $-x_0 = \sup(-A)$

    (c) $x_0 = \text{mín}\, A$ sí y solo sí $-x_0 = \max(-A)$

27. Describir los siguiente subconjuntos de $\mathbb{R}$ y cuando existan dé el ínfimo y el supremo y de ser posible discuta la geometría del conjunto

    (a) $\{x \in \mathbb{R} | \, |x+3| < 4\}$

    (b) $\{x \in \mathbb{R} | \, |x-1| < \frac{1}{x}\}$

    (c) $\{x \in \mathbb{R} | \, |1-2x| < x+1\}$

    (d) $\{x \in \mathbb{R} | \, |x^3| < 3\}$

§5

3.5. Los números Naturales

En este capítulo hemos hablado de mucho de números reales. A partir de los axiomas de campo, de orden y del supremo, hemos deducido la mar de propiedades y, a partir de unos cuantos términos indefinidos (número real, igualdad, suma, producto, menor que), hemos ido introduciendo conceptos mediante definiciones cuidadosas. En suma, hemos ofrecido al estudioso el conjunto de conceptos y propiedades de dichos conceptos, que nos ha parecido imprescindible para su bagaje de conocimientos matemáticos, –un cacho importante del sistema axiomático de los números reales–, Más, aunque parezca inverosímil, hasta aquí no hemos demostrado explícitamente que existen números reales distintos de los tres que nos dan los axiomas directamente: 0, 1 y -1 (recordar que $-0 = 0$ y que $1^{-1} = 1$), y todos esos números con los que hemos tropezado en nuestro derrotero por la vida, como el 2, el 3, el 3/4, el $\sqrt{28}$, el $\sqrt[3]{-5.5}$, π y otros más, ¿no merecen llamarse reales?; los hemos usado en el mercado o durante el juego, en la escuela, o los ha usado el músico o el físico o el químico o hasta nosotros en el tema de ecuaciones, por ejemplo. Entonces ¿cómo definirlos usando el lenguaje de nuestro sistema axiomático?.

Para empezar, sabemos que los números como 1, 2, 3, 4, 5, etc., constituyen la primera clase de números que construyó la cultura humana y que hoy conocemos como el conjunto de números naturales. Distintos grupos humanos, sin aparente conexión entre ellos, como babilonios, egipcios, griegos, romanos, aztecas, mayas, indúes, etc., conquistaron el número natural como respuesta a problemas sociales similares determinados por el desarrollo social hasta niveles semejantes. Aunque para cada cultura se trata de una conquista propia –prueba de ello son las grandes diferencias de formas entre los diferentes sistemas de numeración–, su contenido esencial es el mismo y sirvió al hombre para contar y manejar representaciones numéricas de conjuntos concretos como caballos, mamutes, guerreros, mujeres, niños, hormigas, estrellas, flechas y demás. Toca a nosotros abstraer ese contenido esencial y caracterizarlo con el lenguaje

de nuestro sistema axiomático.

Una primera idea es que, dado que los números naturales son 1, el $1+1$ (que se denota por 2), el $2+1$ (que se denota por 3), y así sucesivamente, este conjunto de números posee ciertamente estas propiedades:
a) 1 es elemento del conjunto.

b) Si el real x es elemento del conjunto, $x+1$ también lo es.

Sin embargo, no bastan estas dos propiedades para caracterizar al conjunto de naturales, pues muchos otros conjuntos las comparten. Por ejemplo: $\mathbb{R}_+$, $[1, \infty]$, $(-3, \infty)$. A este tipo de conjuntos se les llama inductivos.

Definición 3.5.1 Si $A \subseteq \mathbb{R}$, A es **inductivo** si:

a) $1 \in A$.

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad x \in A \Rightarrow x+1 \in A$.

Otros ejemplos de conjuntos inductivos son $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $\{1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, \ldots\}$, todo intervalo de la forma $[a, \infty)$ con $a \leq 1$, y otros más.

Observemos que si A es inductivo, A tiene a 1 como elemento, por la propiedad a) y, por la propiedad b), tiene a 2 $(= 1+1)$, a 3, a 4, etc., es decir, contiene al conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3.5.2 El conjunto

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ es elemento de cualquier conjunto inductivo } \}$$

se llama el conjunto de **Números Naturales**.

Veamos cuanto antes que esta definición formal no nos hace perder las propiedades a) y b) de la definición de conjunto inductivo.

Teorema 3.5.1

1. $\mathbb{N}$ *es inductivo.*

2. *Si* A *es inductivo,* $\mathbb{N} \subseteq A$.

Demostración:

1. Como 1 es elemento de todo conjunto inductivo, $1 \in \mathbb{N}$.

   Ahora probaremos que $\forall\, x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 1 \in \mathbb{N}$.

   Sea $x \in \mathbb{R}$. $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x$ es elemento de cualquier conjunto inductivo y esto implica que $x+1$ es elemento de cualquier conjunto inductivo, es decir, $x + 1 \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\mathbb{N}$ es inductivo.

2. Por definición de $\mathbb{N}$. ■

En una sola frase este teorema dice: "$\mathbb{N}$ es el conjunto inductivo *más pequeño*". Un primer corolario es:

Corolario 3.5.2 $\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad n \geq 1$.

Demostración:
Como $[1, \infty]$ es inductivo, $\mathbb{N} \subseteq [1, \infty)$. ■

Otro corolario, casi igual de simple, pero de capital importancia es este:

Corolario 3.5.3 (Principio de Inducción Matemática)
Si $A \subseteq \mathbb{N}$ *y* A *es inductivo, entonces* $A = N$.

Demostración:
Como A es inductivo, $\mathbb{N} \subseteq A$ pero, por hipótesis, $A \subseteq \mathbb{N}$. Por consiguiente $A = \mathbb{N}$.

El valor de este principio estriba básicamente en que nos dota de un método para demostrar que ciertas propiedades son satisfechas por

todos los números naturales. El método puede resumirse del siguiente modo:

"Sea $P(n)$ una propiedad de la que tiene sentido preguntarse si la cumplen o no los números naturales (o sea, una proposición abierta en $\mathbb{N}$). Para demostrar que es verdadera la proposición

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad P(n),$$

fijémonos primero en aquellos números naturales que satisfacen tal propiedad. Llamemos A, por ejemplo, a tal subconjunto de $\mathbb{N}$. En seguida hay que probar que A es inductivo, lo que probaría de inmediato que $\mathbb{N} \subseteq A$. Como partimos con $A \subseteq \mathbb{N}$ resultaría que $A = \mathbb{N}$, es decir, los naturales que hacen verdadera la proposición $P(n)$ son todos los naturales, ¡valga la expresión!. En resumen:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad P(n) \text{ es verdadera}$$

es verdadera". ■

Debemos observar que éste es un método para deducir y no para inducir. Su mal puesto nombre de inducción se debe quizá a que muchas proposiciones del tipo '$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad P(n)$' son conjeturadas por los matemáticos mediante algún razonamiento inductivo, de esos que sirven para engendrar sentencias generales a partir de unos cuantos casos particulares. Un ejemplo típico es el siguiente:

De la observación de que:

$$\begin{aligned}
1+2=3 &= \tfrac{2\times 3}{2}\\
1+2+3=6 &= \tfrac{3\times 4}{2}\\
1+2+3+4=10 &= \tfrac{4\times 5}{2}\\
1+2+3+4+5=15 &= \tfrac{5\times 6}{2}\\
1+2+3+4+5+6=21 &= \tfrac{6\times 7}{2},
\end{aligned}$$

se conjetura que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3.1}$$

En este caso la proposición abierta $P(n)$ es

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3.2}$$

Es erróneo pensar que una proposición del tipo '$\forall\, n \in \mathbb{N}: \ P(n)$' es verdadera sólo porque $P(n)$ es verdadera para un número finito de valores de n y no conozcamos ningún valor de n que la haga falsa. Por ejemplo, sustituyendo n sucesivamente en la expresión $991n^2 + 1$, por los números 1, 2, 3, ... , no se obtiene un número que sea un cuadrado perfecto (el cuadrado de algún número natural), aun dedicandole años a este cálculo. Sin embargo, si de esto se concluyera que todos los números de esta forma no son cuadrados perfectos (o sea, la veracidad de '$\forall\, n \in \mathbb{N}: \ 991n^2 + 1$ no es cuadrado perfecto'), se caería en un error porque algunos números de la forma $991n^2 + 1$ sí son cuadrados perfectos, pero el menor valor de n para el que esto sucede es:

$$n = 12,\, 055,\, 735,\, 790,\, 331,\, 359,\, 447,\, 442,\, 538,\, 767.$$

¡Qué horror! ¿verdad?.

Creemos que nuestros lectores a estas alturas del curso consideran ya verdad de perogrullo la necesidad de la prueba rigurosa para aceptar la veracidad de las proposiciones lógicas. En el caso de las proposiciones del tipo '$\forall\, n \in \mathbb{N}: \ P(n)$', el método de inducción matemática resulta de un valor gigantesco que nos evita tener que comprobar que $P(n)$ es verdadera al sustituir uno por uno cada natural, en vez de la variable n.

No es uno de los objetivos de este curso entrenar al estudiante en el uso de este método. Ya llevará cursos más adecuados para ello. Sólo lo usaremos para probar otras propiedades de los números naturales que no deben pasar desapercibidas, como el hecho de que $\mathbb{N}$ es un conjunto cerrado bajo la suma y el producto. Explícitamente:

Teorema 3.5.4

1. $\forall\, m,\, n \in \mathbb{N}: \quad m+n \in \mathbb{N}.$

2. $\forall\, m,\, n \in \mathbb{N}: \quad mn \in \mathbb{N}.$

Demostración:

1. La proposición $\forall\, m,\, n \in \mathbb{N}: \quad m+n \in \mathbb{N}$ es en realidad esta

$$\forall\, m \in \mathbb{N}:\ (\forall\, n \in \mathbb{N}:\ m+n \in \mathbb{N}).$$

Para probar que es cierta, sea $m \in \mathbb{N}$ y demostremos, usando el principio de inducción matemática que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}:\ m+n \in \mathbb{N}.$$

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid m+n \in \mathbb{N}\}$. Probaremos que A es inductivo:

a) $1 \in A$ dado que como $m \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ es inductivo, $m+1 \in \mathbb{N}$.
Ahora hay que demostrar:

b) $\forall\, n \in \mathbb{R}:\ n \in A \Rightarrow n+1 \in A.$
Sea pues $n \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} n \in A \quad &\Rightarrow m+n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m+n)+1 \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow m+(n+1) \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in A. \end{aligned}$$

Por ende, A es inductivo y por el principio de inducción,

$$A = \mathbb{N},\ \text{o sea: } \forall\, n \in \mathbb{N}:\ m+n \in \mathbb{N}.$$

2. Vea el ejercicio 4 al final de esta sección. ■

Teorema 3.5.5 *Todo número natural diferente de* 1 *se puede escribir como la suma de* 1 *más algún otro número natural.*

Demostración: Sea

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \quad n = 1 \text{ o } n \text{ se puede escribir como la suma de } 1 \text{ más algún número natural}\}.$$

A es inductivo pues $1 \in A$ claramente, y si $n \in \mathbb{R}$, entonces

$$n \in A \Rightarrow n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$$

y $n+1$ es la suma de 1 con el natural $n \Rightarrow n+1 \in A$.

Por el principio de inducción, $A = N$. ■

Corolario 3.5.6

1. *No existe* $m \in \mathbb{N}: \quad 1 < m < 2$.
2. $\forall\, m \in \mathbb{N}: \quad m > 1 \Rightarrow m \geq 2$.
3. $\forall\, m \in \mathbb{N}: \quad m \geq 2 \Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{N}:\ 1 + r = m$.
4. $\forall\, m \in \mathbb{N}: \quad m \geq 2 \Rightarrow m - 1 \in \mathbb{N}$.

Demostración:

1. Si existiera $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n < 2$ entonces $n \neq 1$ y por el teorema 3.5.5 $\exists\, r \in \mathbb{N}:\ n = r + 1$. Así que:

   $$1 < n < 2 \Rightarrow 1 < r + 1 < 2 \Rightarrow 0 < r < 1$$

   lo que contradice al corolario 3.5.2 del teorema 3.5.1, pues $r \in \mathbb{N}$.

   Para (2), (3) y (4) vea los ejercicios al final de la sección. ■

Teorema 3.5.7 $\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad$ *no existe* $m \in \mathbb{N}: \quad n < m < n+1$.

Demostración: Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid$ no existe $m \in \mathbb{N}:\ n < m < n+1\}$

La afirmación (1) del corolario anterior prueba que $1 \in A$ y si $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\begin{aligned} n+1 \notin A &\Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}:\ n+1 < m < (n+1)+1 \\ &\Rightarrow m > n+1 \geq 2 \quad \text{y} \quad n < m-1 < n+1 \\ &\Rightarrow m-1 \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad n < m-1 < n+1 \Rightarrow n \notin A. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ \ n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ pero esto implica que $\forall\, n \in \mathbb{R} :\ n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ porque $A \subseteq \mathbb{N}$, ¿verdad?. Por lo tanto A es inductivo, así que $A = \mathbb{N}$. ■

Este teorema asegura que entre 1 y 2 no hay otros naturales, ni tampoco entre 3 y 4, ni entre 4 y 5, y así sucesivamente, o sea que $\mathbb{N}$ consta exactamente de 1 y los que se van generando a partir de él, por el reiterativo acto de sumar 1, es decir, $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\}$. Entonces nuestra definición formal de $\mathbb{N}$ sí caracteriza al conjunto de números consentidos de todos.

Antes de continuar con otras interesantes propiedades de $\mathbb{N}$, creemos oportuno comentar que a menudo un proceso inductivo es usado para formular una definición matemática rigurosa. Por ejemplo, si n es un número natural y a es cualquier número real, el producto na suele entenderse como la suma de a consigo misma, n veces. Así $2a = a + a$, $3a = a + a + a$, $4a = a + a + a + a$, etc. Una definición más precisa de na sería la siguiente definición inductiva.

Definición 3.5.3 Sea $a \in \mathbb{R}$. Definimos

1. $1 \cdot a = a$
2. $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ \ (n+1) \cdot a = na + a.$

De esta forma queda definido el producto de n por a para cada natural n en dos pasos. El primero dice explícitamente quién es $1 \cdot a$ y en el segundo se da la forma de obtener cualquier producto de un natural $n+1$ por a si se conoce el producto anterior na.

Otro ejemplo de definición inductiva es la $n-$ésima potencia de un número real a.

Definición 3.5.4 Sea $a \in \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la $n-$**ésima potencia**, a^n, de a mediante los siguientes dos requisitos

1. $a^1 = a$
2. $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ \ a^{(n+1)} = a^n \cdot a.$

Con esta definición inductiva a la mano, resulta un ilustrativo y nada difícil ejercicio demostrar estas "leyes de los exponentes".

Teorema 3.5.8 *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$. *Entonces*

a) $\forall\, n, m \in \mathbb{N},\ a^n a^m = a^{(n+m)}$.

b) $\forall\, n, m \in \mathbb{N},\ (a^n)^m = a^{nm}$.

c) $\forall\, n, m \in \mathbb{N},\ (ab)^n = a^n b^n$.

Ahora sí, continuemos con otras interesantes propiedades de $\mathbb{N}$.

Teorema 3.5.9 $\mathbb{N}$ *no está acotado superiormente*

Demostración:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \text{ acotado superiormente} &\Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : \alpha = \sup \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \alpha - 1 \text{ no es cota superior de } \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} :\ \alpha - 1 < n \leq \alpha \\ &\Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N} \qquad \alpha < n + 1 \\ &\Rightarrow \alpha \text{ no es cota superior de } \mathbb{N}, \end{aligned}$$

lo cual es falso. ■

Corolario 3.5.10 (Propiedad Arquimediana o Principio de Arquimedes). *Si* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $a > 0$, *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $na > b$ *(o sea, tal que* $\underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n-veces} > b$*).*

Demostración:

Por el teorema 3.5.9, $\frac{b}{a}$ no es cota superior de $\mathbb{N}$, por lo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{b}{a}$. Así, $na > b$. ■

Este principio dice que, por pequeño que sea el real a, si es positivo, sumándolo consigo mismo un número suficiente de veces, podemos "rebasar" cualquier otro número real dado, por muy grande que sea. Quizá la manera más pintoresca de recordarlo es mediante el refrán que señala: "de poquito en poquito se desparrama el jarrito".

Como ejemplo del uso de este principio, probemos que el ínfimo del conjunto $C = \left\{ \frac{1}{2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ es cero.

Es claro que 0 es cota inferior de C y que C tiene ínfimo ¿o no?. Sea $\beta = \text{ínf}\, C$. Por eso $0 \leq \beta$. Para ver que $\beta \leq 0$, supongamos lo contrario, es decir, que $\beta > 0$, entonces, *por la propiedad Arquimediana*, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\beta > 1$. Por consiguiente $\beta > \frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n} \in C$, es decir, β no es cota inferior de C, lo que es falso, dado que es el ínfimo de C. Con esto termina nuestra prueba por reducción al absurdo.

C es un ejemplo de un conjunto no vacío que no tiene mínimo, ya que si lo tuviera, tendría que ser 0 (¿por qué?) y 0 estaría en C, lo que es falso. Nuestra última propiedad importante de $\mathbb{N}$ establece que ningún subconjunto no vacío de los naturales se comporta como C. Más explícitamente:

Teorema 3.5.11 (Principio del Buen Orden)
Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ *tiene mínimo.*

Demostración:

Sea $M \subseteq \mathbb{N}$ y $M \neq \varnothing$. Es claro que M está acotado inferiormente y, de acuerdo con el teorema 3.4.6, existe $\alpha = \text{ínf}\, M$.

$$\alpha + 1 > \alpha \Rightarrow \exists\, n_0 \in M : \ \alpha \leq n_0 < \alpha + 1.$$

Pero $\alpha \leq n_0$ implica que $\alpha < n_0$ o $\alpha = n_0$. Si $\alpha < n_0$, entonces existe $m \in M$ tal que $m < n_0$. Usando el ejercicio 6 de esta sección sabemos que existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 = m + r_0$ y por consiguiente, dado que $r_0 \geq 1$, se tiene

$$\alpha \leq m + r_0 < \alpha + 1 \leq \alpha + r_0 \Rightarrow m + r_0 < \alpha + r_0 \Rightarrow m < \alpha$$

lo cual es falso. Por lo tanto $\alpha = n_0$. ■

Esta prueba hace uso del axioma del supremo, pero se pueden dar demostraciones del principio del buen orden que no dependan de este axioma (ver ejercicio 16 de Ejercicios 5.).

En secciones posteriores apreciaremos lo trascendente de este principio. Mientras tanto, ahí les van los

Ejercicios 5.

1. Demuestre que $\mathbb{R}_+$, $(-3, \infty)$ y todo intervalo de la forma $[a, \infty]$ con $a \leq 1$, son inductivos.

2. Si A y B son inductivos, pruebe que $A \cap B$ también lo es. ¿Qué puede decir de $A \cup B$?

3. Pruebe que $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 - 2^{n+2} + 2 \cdot 3^{n+1} - 4^{n+1} + 5^n = 0\}$ no es inductivo. (*Sugerencia*: ¿$4 \in A$?)

4. Demuestre (2) del teorema 3.5.4.

5. Demuestre (2), (3) y (4) del corolario del teorema 3.5.5.

6. Use el principio de inducción matemática para demostrar que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\ \forall\, m \in \mathbb{N} :\ n < m \Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{N} :\ n + r = m.$$

   (*Sugerencia*: Pruebe que es inductivo el conjunto

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall\, m \in \mathbb{N} :\ n < m \Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{N} :\ n + r = m\})$$

7. Demuestre que $\forall\, n, m \in \mathbb{N} :\ (n < m \Rightarrow m - n \in \mathbb{N})$. (*Sugerencia*: Use el ejercicio 6)

8. Pruebe el teorema 3.5.8

9. Demuestre que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ acotado superiormente, tiene máximo.

10. Probar que $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

11. Observar que

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1-4 &= -(1+2) \\ 1-4+9 &= 1+2+3 \\ 1-4+9-16 &= -(1+2+3+4). \end{aligned}$$

Conjeturar una ley general sugerida por estos ejemplos, expresarla en una conveniente notación matemática y probarla.

12. Evalúe la expresión

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n}$$

para $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$.

Conjeture una fórmula para este cociente.

Usando el problema (9), obtenga una fórmula para $1^2+2^2+\cdots+n^2$ y pruébela. (*Sugerencia*: $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

13. Hallar el error en la siguiente "prueba por inducción" de que *cualesquiera n muchachas tienen ojos del mismo color.*

Sea $P(n)$: Si $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n$ son n muchachas, entonces $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n$ tienen ojos del mismo colos.

$P(1)$ es obviamente cierta. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $P(n)$ es cierta. Para probar $P(n+1)$ sean $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_{n+1}$ cualesquiera $n+1$ muchachas. Como se vale $P(n)$, $m_1,\ \ldots,\ m_n$ tienen el mismo color de ojos entre sí y $m_2,\ \ldots,\ m_{n+1}$ también. Por consiguiente todas tienen el mismo color de ojos.

Así que $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Por consiguiente

$$\forall\, n \in \mathbb{N}:\ P(n).$$

14. A continuación se "demuestra" que $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ n = n + 1$.

    "Sea $A = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n = n + 1\}$.

    $1 \in A$ por definición de A.

    Probaremos que $\forall\, n \in \mathbb{R} :\ n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$.

    Sea $n \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} n \in A &\Rightarrow n = n + 1 \quad \text{y} \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 = n + 2 \quad \text{y} \quad n + 1 \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow n + 1 = (n + 1) + 1 \quad \text{y} \quad n + 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in A. \end{aligned}$$

    Por lo tanto A es inductivo y como $A \subseteq \mathbb{N}$, por el principio de inducción matemática, se tiene $A = \mathbb{N}$". ¿En dónde esta el error?

15. Demuestre el "principio de recursión":

    Si $P(n)$ es una proposición abierta en $\mathbb{N}$ y si:

    a) $P(1)$ es verdadera.

    b) $[\forall\, n \in \mathbb{N} :\ P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(n) \Rightarrow P(n + 1)]$ es verdadera, entonces también es verdadera:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\ P(n).$$

    (*Sugerencia*: Defina $q(n)$ como $P(1) \wedge P(2) \ldots \wedge P(n)$ y pruebe por inducción matemática que $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ q(n)$.)

16. Usando el principio de recursión pruebe el principio del buen orden. (*Sugerencia*: pruebe por recursión que si $S \subseteq \mathbb{N}$ y $S \neq \varnothing$, entonces $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ n \in S \Rightarrow S$ tiene mínimo)

17. Demuestre que si $\varepsilon > 0$, $\exists\, n \in \mathbb{N} :\quad \frac{1}{n} < \varepsilon$. (*Sugerencia*: Use la propiedad Arquimediana.)

18. Pruebe que $1 = \sup\left\{\frac{n-1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

§6

3.6. Números Enteros, Racionales e Irracionales

No solo los números naturales son introducidos en la primera enseñanza, sino también los "horrendos quebrados" o fracciones positivas, una tenebrosa noción del cero –más bien relacionada con la calificación– y nada de los números negativos. Toca a estos últimos convertirse en poderosos refuerzos de la personalidad del estudiante de secundaria en tanto le permiten restar cualesquiera dos números naturales en el orden que sea, y retar al hermano menor:

– A ver, Benjamín, ¿cuánto es $83 - 100$?

–¡Ah?, pues no se puede.

–Claro que sí, tontito; es -17.

Dos posibles reacciones puede tener Benjamín; una envidia hacia su sabio hermano Delfín o la fuerte sensación de que su hermano mayor se halla bajo los efectos de una buena dosis de cannabis o, lo que es lo mismo, de que está chiflado.

Como en el currículum usual, en el de la humanidad aparecieron antes las fracciones positivas que los números negativos. Aquellas ya las conocían los egipcios desde mucho antes de Cristo; los negativos no vinieron a ser incorporados sino hasta 1545, con la publicación del Ars Magna de Girolamo Cardano.

A continuación les presentamos a ustedes lo más básico de estos conjuntos de números: los enteros y los racionales (fracciones positivas y negativas).

Definición 3.6.1

a) $\mathbb{N}_- = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

b) Al conjunto $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}_-$ se le llama conjunto de **números enteros**.

Así pues, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ y es fácil ver que la suma y el producto de enteros es también un número entero (ver ejercicio 1). Así mismo, la resta es una operación cerrada en $\mathbb{Z}$, lo que no ocurre en $\mathbb{N}$ ($83 - 100 < 0 \Rightarrow 83 - 100 \notin \mathbb{N}$).

Otra cosa ocurre con el cociente. Esta operación no es cerrada en $\mathbb{Z}$. Por ejemplo, si n es un natural mayor que 1, entonces $0 < \frac{1}{n} < 1$ por el corolario 3.5.2 del teorema 3.5.1, $\frac{1}{n} \notin \mathbb{N}$ y por lo tanto $\frac{1}{n} \notin \mathbb{Z}$ pues $\frac{1}{n}$ no es cero y no es negativo.

Un conjunto en el que sí son cerradas las cuatro operaciones fundamentales: adición, producto, resta y cociente, es el conjunto de los números racionales, que definiremos a continuación:

Definición 3.6.2 El conjunto de los números racionales es el conjunto

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a,\, b \text{ son enteros y } b \neq 0 \right\}.$$

Otra observación inmediata es que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, ya que si $a \in \mathbb{Z}$, entonces $a = \frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$. En particular el 1 y el 0 son racionales. Por lo tanto, al satisfacer la suma y el producto de reales, las propiedades de conmutatividad, asociatividad y distributividad en todo $\mathbb{R}$, tales operaciones, restringidas sólo a elementos de $\mathbb{Q}$ siguen satisfaciendo dichas propiedades. Además, si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ con a y b distintos de cero, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ también es racional. Por todas estas observaciones es fácil concluir que $\mathbb{Q}$ es un campo.

Veamos otras importantes propiedades de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.

Teorema 3.6.1

1. $\forall\, a \in \mathbb{Z}: \quad (a,\, a+1) \cap \mathbb{Z} = \varnothing.$

2. $\forall\, a,\, b \in \mathbb{Z}: \quad a \neq b \Rightarrow [a,\, a+1) \cap [b,\, b+1) = \varnothing.$

Demostración:

1. Sea $a \in \mathbb{Z}$

i) Si $a > 0$, entonces $a \in \mathbb{N}$ y en el teorema 3.5.7 se probó que $(a,\, a+1) \cap \mathbb{N} = \varnothing$. Pero como $a > 0$, $(a,\, a = \cap(\mathbb{N}_- \cup \{0\}) = \varnothing$ y por eso $(a,\, a+1) \cap \mathbb{Z} = \varnothing$.

ii) Si $a = 0$, $(a,\, a+1) = (0,\, 1)$ y es claro que $(0,\, 1) \cap \mathbb{N} = \varnothing$. $(0,\, 1) \cap \mathbb{N}_- = \varnothing$ y que $0 \notin (0,\, 1)$ y es por esto que $(0,\, 1 \cap \mathbb{Z}) = \varnothing$.

iii) Si $a < 0$ es ejercicio (ver ejercicio 3).

2. Sean $a,\, b \in \mathbb{Z}$ con $a \neq b$, podemos suponer que $a < b$. Entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + r$ (ver ejercicio 4). así que $b \geq a + 1$. Por lo tanto $x \in [a,\, a+1) \Rightarrow a \leq x \leq a+1 \leq b \Rightarrow x \notin [b,\, b+1)$. ■

Una consecuencia de este teorema y del principio del buen orden (teorema 3.5.11) es el siguiente teorema.

Teorema 3.6.2 *Para cada números real x, existe un único número entero a tal que $a \leq x \leq a + 1$.*

Demostración: Demostraremos primero la existencia de un número $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \leq x \leq a + 1$.

Si $x \in \mathbb{Z}$, basta escoger $a = x$, puesto que $x \in \{x, x + 1)$.

Supongamos ahora que $x \notin \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z}$ no está acotado inferiormente (ver ejercicio 6 de Ejercicios 6), el conjunto $A = \{z \in \mathbb{Z} \,|z < x\}$ no es vacío y, dado que x es una cota superior de A, por el ejercicio 7 de ejercicios 6, existe $a = \max A$. Entonces $a \in \mathbb{Z}$ y $a < x$.

Como $\mathbb{Z}$ no está acotado superiormente, el conjunto $B = \{z \in \mathbb{Z} \,|x < z\}$ no es vacío y, dado que x es una cota inferior de B, por el ejercicio 8 de ejercicios 6, existe $b = \text{mín}\, B$. Entonces $b \in \mathbb{Z}$ y $b > x$. Así que $a, b \in \mathbb{Z}$ y $x \in (a, b)$.

Ahora observemos que no existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $a < z < b$: Si existiera tal z, tendríamos $a < z < x$ o $x < z < b$. En el primer caso z sería un elemento de A mayor que el máximo de A y, en el segundo caso, z sería un elemento de B menor que el mínimo de B. ninguno de estos casos puede ocurrir.

Entonces $b = a - 1$ y así, $x \in [a, a + 1)$ (ver 5 de Ejercicios 6)

La unicidad es inmediata de (2) del teorema 3.6.1. ■

Este resultado nos permite definir el concepto de parte entera de un números real.

Definición 3.6.3 Sea $x \in \mathbb{R}$. La **parte entera** de x es el único entero a tal que $x \in [a,\, a+1)$. A este números lo denotaremos por $[x]$.

Por ejemplo $[3] = 3$, $[-3] = -3$, $[3.5] = 3$, $[-3.5] = -4$, $[\pi] = 3$, $\left[-\frac{1}{2}\right] = -1$.

Los Teoremas 3.6.1 y 3.6.2 nos dicen que entre dos enteros b y $b+1$ dados consecutivos, no hay ningún otro entero, aunque la unión de todos los intervalos de la forma $[a,\, a+1)$ con $a \in \mathbb{Z}$ es todo $\mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ en cambio sí es un conjunto bien metiche: en cualquier intervalo, por pequeño que sea, hay un racional por lo menos. Expresado con más formalidad presentamos esta propiedad como:

Teorema 3.6.3 (Propiedad de densidad de $\mathbb{Q}$)
Sea $x,\, y \in \mathbb{R}$. Si $x < y$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

Demostración: Como $x < y$, se tiene que $y - x > 0$ y por la propiedad arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n_0(y-x)$ y por lo tanto

$$n_0 x + 1 < n_0 y. \tag{3.3}$$

Por otro lado, si $[n_0 x]$ se denota por m, se tiene que $m \leq n_0 x < m+1$ y entonces $n_0 x < m+1 \leq n_0 x + 1 < n_0 y$, así que, dividiendo entre n_0, queda

$$x < \frac{m+1}{n_0} < y, \qquad \text{con} \qquad \frac{m+1}{n_0} \in \mathbb{Q}. \quad \blacksquare$$

El hecho de que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ se puede expresar diciendo que hay enteros a y b, con $b \neq 0$, cuyo cociente es entero. Por ejemplo $\frac{4}{2}$, $\frac{63}{3}$, $\frac{-6}{2}$, $\frac{414}{9}$, $\frac{-15}{3}$, etc. Resulta útil dar un nombre especial a esta situación.

Definición 3.6.4 Sean a, b enteros con $b \neq 0$. Se dice que b **divide a** a si el cociente $\frac{a}{b}$ es un entero, es decir, si existe un entero c tal que $a = bc$. A la proposición "b divide a a" se le denota por $b|a$ y a la proposición "b no divide a a" se le denota por $b \nmid a$.

Otras formas muy usadas para decir que b divide a a, son

I) a es divisible entre b.

II) a es múltiplo de b.

III) b es divisor de a.

Nota: No confundir $a|b$ con $\frac{a}{b}$. Por eso rogamos que para decir que a divide a b, ponga el palito bien parado y para dividir a entre b, bien acostado.

Ejemplos: $3|63$, $-2|6$, $2|-6$, $9|414$, $-9|-414$, $3|-15$, etc.

Enunciemos algunas propiedades del concepto de divisibilidad.

Teorema 3.6.4 *Sean a, b, c, u, v enteros. Entonces:*

1. $a|a \ y \ -a|a$,
2. $a|b \ y \ b|c \Rightarrow a|c$,
3. $a|b \ y \ a|c \Rightarrow a|b+c \ y \ a|b-c$,
4. $a|b \Rightarrow ac|bc$,
5. $a|ab$,
6. $a|b \ y \ a|c \Rightarrow a|ub+vc$,
7. $a|0$, $1|a \ y \ -1|a$,
8. $a|1 \Rightarrow a = 1 \ o \ a = -1$,
9. $a|b \ y \ b|a \Rightarrow a = b \ o \ a = -b$,

10. $b|a \ y \ a \neq 0 \Rightarrow |a| \geq |b|$.

Demostración: Sólo probaremos (6), (8), (9) y (10).

6. $$\begin{aligned} a|b \quad \text{y} \quad a|c &\overset{(5)}{\Rightarrow} (a|b \text{ y } b|ub) \text{ y } (a|c \text{ y } c|vc) \\ &\overset{(2)}{\Rightarrow} a|ub \text{ y } a|vc \\ &\overset{(3)}{\Rightarrow} a|uv + vc \end{aligned}$$

8. $a|1 \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{Z} : \ 1 = a \cdot c \Rightarrow 1 = |a||c|$ con $|a|$ y $|c|$ en $\mathbb{N}$. Pero $|c| \in \mathbb{N} \Rightarrow |c| \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{|c|} \leq 1 \Rightarrow |a| \leq 1$ y $|a| \in \mathbb{N}$ y $0 < |a| \leq 1 \Rightarrow |a| = 1$.

9. $a|b \Rightarrow \exists\, c_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot a_1$ y $b|a \Rightarrow \exists\, c_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b \cdot c_2$. Por lo tanto se tiene que $a = b \cdot c_2 = a \cdot (c_1 c_2)$ y como $a \neq 0$, $c_1 c_2 = 1$, es decir, $c_1|1$ y por (8) $c_1 = 1$ o $c_1 = -1$ de donde obtenemos que $b = a$ o $b = -a$.

10. $b|a \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{Z} : \ a = bc \Rightarrow |a| = |b||c|$ y como $|a| \neq 0$, $|c| \neq 0$ y por lo tanto $|c| \geq 1$, es decir $|a| \geq |b|$. ■

Teorema 3.6.5 *Si* $a, b \in \mathbb{Z}$ *con* $b \neq 0$ *entonces*

$$b|a \Leftrightarrow |b| \,|\, |a|.$$

Demostración:

$b|a \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{Z} : \ a = bc \Rightarrow |a| = |b||c|$ con $|c| \in \mathbb{Z} \Rightarrow |b| \,|\, |a|$.

Ahora bien, $|b| \,|\, |a|$, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $|a| = |b|c$. Si $a = 0$, entonces $b|a$ por (7) del teorema 3.6.4. Si $a \neq 0$, entonces $c > 0$ y $|b| = \frac{|a|}{c} = \left|\frac{a}{c}\right|$, de donde $\frac{a}{c} = b$ o $\frac{a}{c} = -b$. De aquí: $a = bc$ o $a = b(-c)$. En cualquier caso $b|a$. ■

Basándose en este teorema, bastaría limitarse en adelante a la divisibilidad de enteros no negativos. Pero en aras de la claridad, cuando esto hagamos, lo diremos explícitamente.

Definición 3.6.5

a) Si a, $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$, se dice que un entero c es un **multiplo común** de a y de b si $a|c$ y $b|c$.

b) Si $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ y b, $c \in \mathbb{Z}$ se dice que a es un **divisor común** de b y c si $a|b$ y $a|c$.

Algunas propiedades relacionadas con estos conceptos son presentadas en los siguientes dos teoremas.

Teorema 3.6.6 *Si a, $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$, existe un único natural M tal que*

I) *M es múltiplo común de a y b.*

II) *Si c es multiplo común de a y b entonces $M|c$.*

Demostración: Sean a, $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ y sea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid a|n \text{ y } b|n\}$. Por (5) del teorema 3.6.4 y por el teorema 3.6.5 $|ab| \in A$, así que por el principio del buen orden, existe $M = \min A$. Por lo tanto $M \in \mathbb{N}$ y se cumple i) pues $M \in A$.

Para probar ii), sea c un múltiplo común de a y b y sea $k = \left[\frac{c}{M}\right]$. Entonces $k \leq \frac{c}{M} + 1$ y de aquí que $kM \leq c < (k+1)M$. Por lo tanto

$$c - kM \geq 0 \tag{3.4}$$

y

$$c - (k+1)M < 0. \tag{3.5}$$

Si $c - kM > 0$ entonces $c - kM \in A$ ya que $c - kM \in \mathbb{N}$ y es múltiplo común de a y b (por 3) del teorema 3.6.4 pues c y kM son múltiplos de a y b. Por lo tanto, como $M = \min A$, $M \leq c - kM$ y entonces $c - (k+1)M \geq 0$, lo que contradice a (3.5). Como se vale (3.4) concluimos que $c - kM = 0$ y con ello que $c = kM$, es decir, $M|c$. La unicidad se tiene por (10) del teorema 3.6.4 y es un ejercicio para el lector. ■

Definición 3.6.6 Si a, $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$, al único natural M que satisface i) y ii) del teorema anterior, se le llama el **mínimo común multiplo** de a y b y lo denotaremos por m.c.m. (a, b).

Teorema 3.6.7 *Si* $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ *y* $M = m.c.m.(a, b)$, *entonces el número* $d = \frac{ab}{M}$ *es siempre un divisor común de* a *y* b.

Demostración: d es entero, ya que $M|b$ por el teorema anterior. $d = \frac{ab}{M} \Rightarrow b = d\frac{M}{a}$ con $\frac{M}{a} \in \mathbb{Z}$. Por eso $d|b$. También $a = \frac{dM}{b}$ con $\frac{M}{b} \in \mathbb{Z}$ y por eso $d|a$. ■

En la primaria suelen enseñar a obtener el mínimo común multiplo de dos (o más) números, usando un misterioso procedimiento para descomponer cada uno de los números dados en sus respectivos "factores primos". ¿Se acuerda de los primos?, si no, ahí les va la siguiente.

Definición 3.6.7 Se dice que un números natural p es un **número primo** si $p \neq 1$ y p no es divisible entre ningún otro natural distinto de 1 y p. Un número natural $n > 1$ que no es primo se llama **número compuesto**.

Así, los números primos menores que 20 son: 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17 y 19, y los números compuestos menores que 20 son: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18. Observe que, por el teorema 3.6.5, si p es primo y $a|p$ entonces $a = 1$ o $a = -1$ o $a = p$ o $a = -p$.

Ahora sí, el misterioso procedimiento para descomponer un número natural dado en sus factores primos consiste en ir dividiendo el número progresivamente entre los primos que lo dividen, teniendo cuidado en anotar dichos primos y los cocientes que se van obteniendo hasta que el último cociente es 1. Por ejemplo

$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Así $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ y $75 = 3 \cdot 5^2$.

Una vez desnudados estos números en sus factores primos, podemos formar un número con cada uno de los primos que aparecen en ambas descomposiciones y elevando al mayor exponente con el que se presente. En este caso sería el número

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2100$$

Este es el mínimo común multiplo de 420 y 75. ¡Compruébelo por favor!

Lo que podemos cuestionar ahora que estamos en "La Universidad" es si todo número natural mayor que 1 puede representarse en forma de un producto de números primos, y más aún, si la expresión de un número como producto de primos es único. La respuesta a ambas preguntas es afirmativa y su enunciado constituye el teorema fundamental de la aritmética.

Teorema 3.6.8 (Teorema Fundamental de la Aritmética) *Supongamos que $a \in \mathbb{N}$ y $a > 1$. Entonces:*

1. *(Existencia). Existe un número finito de números primos, no necesariamente diferentes, digamos P_1, P_2, ..., P_n tales que*

   $$a = P_1 \cdot P_2 \cdots P_n \qquad (*)$$

2. *(Unicidad del teorema de factorización). La representación de a en factores primos como en $(*)$ es única, salvo por el orden.*

Demostración:

1. Sea

$$A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n > 1 \quad \text{y} \quad n \text{ no se puede escribir como un producto finito de primos}\}.$$

Queremos demostrar que $a \notin A$. Supongamos que $a \in A$. Entonces $A \neq \varnothing$ y por el principio del buen orden, existe $n_0 = \text{mín}\, A$. Como $n_0 \in A$, n_0 es un compuesto (si n_0 fuera primo $n_0 = n_0$ sería su descomposición en factores primos). Por lo tanto n_0 tiene un divisor natural b, distinto de n_0 y de 1. Pero

$$b|n_0 \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{N} : \ n_0 = bc \Rightarrow 1 < b < n_0 \text{ y } 1 < c < n_0.$$

Como $n_0 = \text{mín}\, A$, b y c no son elementos de A, y como son mayores que 1, b y c se pueden escribir como producto finito de primos y por lo tanto n_0 también, lo cual es falso pues $n_0 \in A$. Esta contradicción viene de suponer que $a \in A$. Por lo tanto $a \notin A$ y se tiene 1.

2. Para demostrar esta parte, necesitaremos el siguiente lema:

Lema 3.6.9 *Si p es un primo y divide al producto ab de dos enteros, entonces $p|a$ o $p|b$.*

Demostración: (Del Lema) Sea $m = \text{m.c.m.}\,(p,\, a)$. Como $a|ab$ y $p|ab$ por hipótesis, entonces $m|ab$ así que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$ab = nm \tag{3.6}$$

Si $d = \frac{pa}{m}$, por el teorema 3.6.7, $d|p$ y $d|a$ pero como p es primo, $d = p$ o $d = 1$.

Si $d = p$ entonces $p|a$ (pues $d|a$).

Si $d = 1$ entonces

$$1 = \frac{pa}{m} \Rightarrow pa = m \overset{(3.6)}{\Rightarrow} ab = npa \Rightarrow b = np \Rightarrow p|b.$$

Y un corolario del Lema 3.6.9::

Corolario 3.6.10 *Si un primo p divide al producto de un número finito de números enteros entonces p divide por lo menos a uno de sus factores.*

Ahora sí la demostración de 2.

Supongamos que a puede ser expresado como un producto de s primos, digamos:

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdots p_s \tag{3.7}$$

y también como un producto de t primos, digamos

$$a = q_1 \cdot q_2 \cdots q_t \tag{3.8}$$

donde $t \geq s$. Probaremos que $s = t$ y que las $p's$ son las mismas que las $q's$ excepto posiblemente por el orden en que aparecen escritos. Tenemos

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_s = q_1 \cdot q_2 \cdots q_t \tag{3.9}$$

$p_1|a \Rightarrow p_1|q_1 \cdots q_t$. Así, p_1 divide a una de las $q's$. Por conveniencia, podemos renombrar los $q's$ si fuera necesario, para tener $p_1|q_1$. Dado que p_1 y q_1 son primos, entonces p_1 debe ser igual a q_1 y podemos dividir ambos lados de (3.9) entre p_1 y obtener

$$p_2 \cdot p_3 \cdots P_s = q_2 \cdot q_3 \cdots q_t \tag{3.10}$$

Ahora, $p_2|q_2q_3 \cdots q_t$ así que p_2 divide a alguno de los $q's$, digamos q_2. Como antes $p_2 = q_2$ y dividiendo ambos lados de (3.10) entre p_2, obtenemos

$$p_3 \cdot p_4 \cdots P_s = q_3 \cdot q_4 \cdots q_t \tag{3.11}$$

Podemos continuar aplicando este procedimiento a cada una de las $p's$. Si $s < t$, después de aplicar el procedimiento a p_s, tendríamos $1 = q_{s+1} \cdots q_t$, lo que implicaría (por 8 del teorema 3.6.4) que $q_{s+1} = q_{s+2} = \cdots = q_t = 1$ lo cual es falso pues son primos. Por lo tanto $s = t$. ■

Ejemplos:

1. $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5^2$.

2. $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

3. $1400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

4. $98000 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 2^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2$.

Hemos visto ya algunas propiedades de $\mathbb{Z}$ y de $\mathbb{Q}$. En los ejercicio y en la siguiente sección podran conocer otras propiedades, pero no queremos abandonar esta sección sin hacer el siguiente comentario.

$\mathbb{Q}$ satisface la propiedad de densidad, o sea que "hay racionales por doquier". $\mathbb{Q}$ es un campo, como mencionamos antes del teorema 3.6.1. Como $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, también es fácil convencerse de que

1. $\forall\, x,\, y \in \mathbb{Q}$ una y sólo una de las afirmaciones siguientes se cumplen: $x < y$, $x = y$, $x > y$.

2. $\forall\, x,\, y,\, z \in \mathbb{Q}:\ x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$.

3. $\forall\, x,\, y,\, z \in \mathbb{Q}:\ x < y \Rightarrow x + z < y + z$.

4. $\forall\, x,\, y,\, z \in \mathbb{Q}:\ x < y \wedge z > 0 \Rightarrow xz < yz$.

es decir, que si estuviéramos estudiando solamente números racionales en vez de todos lo reales, de todos modos contaríamos con las importantes propiedades de orden y campo y todas sus consecuencias.

Tal vez algunos de ustedes (¡ojalá!) ya se hayan hecho la pregunta de si en $\mathbb{Q}$ se valdría también una proposición que hiciera las veces del axioma del supremos en $\mathbb{R}$, es decir:

$$(**)\ \begin{cases} \text{Si } A \subseteq \mathbb{Q},\ A \neq \varnothing \text{ y } A \text{ es acotado superiormente,} \\ \text{entonces existe } \beta \in \mathbb{Q} \text{ tal que:} \\ \qquad \text{i) } \beta \text{ es cota superior de } A \\ \qquad \text{ii) Si } b \text{ es cota superior de } A,\ b \geq \beta. \end{cases}$$

Esto es precisamente lo que le falta a $\mathbb{Q}$. En efecto, $(**)$ es falsa en $\mathbb{Q}$. Veamos un contraejemplo:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \quad \text{y} \quad x^2 < 2\}$$

$A \neq \varnothing$ pues $1 \in A$ y A está acotada superiormente, ya que $x \in A \Rightarrow x^2 < 2 < 2^2 \Rightarrow x < 2$ (aquí se usó que $x > 0$, $2 > 0$ y el teorema 3.3.4, 95). Entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha = \sup A$, por el axioma del supremo en $\mathbb{R}$. Como vimos en la sección 4 de este capítulo, si hubiera un número β que satisficiera i) y ii), tendría que coincidir con α, así que para concluir que no existe ningún número $\beta \in \mathbb{Q}$ que satisface i) y ii), basta ver que $\alpha \notin \mathbb{Q}$. La prueba la haremos por reducción al absurdo:

Supongamos que $\alpha \in \mathbb{Q}$. Probaremos que no puede pasar que $\alpha^2 > 2$, ni que $\alpha^2 < 2$, ni que $\alpha^2 = 2$, lo cual contradice el teorema de tricotomía (O1).

a) Supongamos que $\alpha^2 < 2$ entonces $\frac{\alpha^2}{2} < 1$ y por lo tanto $0 < 1 - \frac{\alpha^2}{2} < 1$.
Sea $h \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < h < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$. Entonces $h < \frac{1}{2}$ y con ello $0 < 1 - h < 1$ y $1 - 2h > 0$. Así que:

$$\frac{1}{(1-h)^2} = \frac{1}{1 - 2h + h^2} \leq \frac{1}{1 - 2h}$$

y por eso

$$\left(\frac{\alpha}{a-h}\right)^2 \leq \frac{\alpha^2}{1-2h} \tag{3.12}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} h < \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{\alpha^2}{2}\right) &\Rightarrow 2h < 1 - \tfrac{\alpha^2}{2} \Rightarrow 1 - 2h > \tfrac{\alpha^2}{2} \\ &\Rightarrow \tfrac{\alpha^2}{1-2h} < 2 \overset{(3.12)}{\Rightarrow} \left(\tfrac{\alpha}{a-h}\right)^2 < 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{\alpha}{1-h} \in A \quad \text{y} \quad \frac{\alpha}{1-h} > \alpha \quad (\text{pues } \frac{1}{1-h} > 1).$$

Esto contradice el hecho de que $\alpha = \sup A$. Por lo tanto, no es cierto que $\alpha^2 < 2$.

b) Supongamos que $\alpha^2 > 2$.

$$\alpha^2 > 2 \Rightarrow 1 > \frac{2}{\alpha^2} \Rightarrow 1 > \frac{2}{\alpha^2} \Rightarrow 1 > 1 - \frac{2}{\alpha^2} > 0.$$

Sea $h \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < h < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\alpha^2}\right)$. Entonces $0 < h < 1$ y por eso $1 > 1 - h > 0$. Por lo tanto

$$(\alpha(1-h))^2 = \alpha^2(1-h)^2 = \alpha^2(1 - 2h + h^2) \geq \alpha^2(1-2h).$$

Pero

$$\begin{aligned} h < \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{2}{\alpha^2}\right) &\Rightarrow 2h < 1 - \tfrac{2}{\alpha^2} \\ &\Rightarrow 1 - 2h > \tfrac{2}{\alpha^2} \\ &\Rightarrow \alpha^2(1-2h) > 2 \Rightarrow (\alpha(1-h))^2 > 2. \end{aligned}$$

Sin embargo $\alpha(1-h) < \alpha$ y como $\alpha = \sup A$, $\exists\, x \in A$ tal que $\alpha(1-h) < x \leq \alpha \Rightarrow (\alpha(a-h))^2 < x^2 < 2$. Por lo tanto $(\alpha(1-h))^2 > 2$ y $(\alpha(1-h))^2 < 2$ y esto es super falso.

c) Supongamos que $\alpha^2 = 2$. Como estamos suponiendo $\alpha \in \mathbb{Q}$ existen a, $b \in \mathbb{N}$ tales que $\alpha = \frac{a}{b}$, es decir,

$$2 = \frac{a^2}{b^2}. \tag{3.13}$$

Por otro lado, $b \neq 1$ ya que si no, $\alpha = a$ y $2 = a^2$ no sería primo. También $a \neq 1$ pues de otro modo

$$\alpha = \frac{1}{b} \Rightarrow 2 = \frac{1}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = 1 \Rightarrow b^2 | 1 \Rightarrow b = 1.$$

Entonces, por el teorema de factorización única a y b se pueden descomponer de manera única, en primos:

$$a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_s, \qquad b = q_1 \cdot \ldots \cdot q_t$$

y por (3.13)

$$2(q_1 \cdot \ldots \cdot q_t)(q_1 \cdot \ldots \cdot q_t) = (p_1 \cdot \ldots \cdot p_s)(p_1 \cdot \ldots \cdot p_s).$$

El lado izquierdo y el lado derecho son factores primos del mismo número y por el teorema de factorización única debería contar con el mismo número de factores primos, lo cual no se cumple pues del lado derecho hay un número par de factores primos ($2s$) y del lado izquierdo un número impar ($2t + 1$ por culpa del 2). Esta contradicción prueba que es falso que $\alpha^2 = 2$.

Por lo tanto, de (a), (b) y (c) concluimos que $\alpha \notin \mathbb{Q}$ es decir, no existe $\beta \in \mathbb{Q}$ que satisface i) y ii) en $(**)$. Observe que de paso hemos probado que existen números que no son racionales, a saber, el supremo de nuestro conjunto A.

Definición 3.6.8 Al conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ se le llama el conjunto de números **irracionales**.

Es interesante añadir que el descubrimiento de la existencia de números irracionales constituyó el inicio de la que se considera la primera crisis en los fundamentos de las matemáticas.

Se sabe que Pitágoras vió en los números la clave para la comprensión del Universo. Pitágoras y sus seguidores atribuían números a todos los aspectos de la naturaleza, pero no conocían aún el concepto abstracto de número, por lo que todo número era presentado por ellos en forma de figura geométrica. Los números que usaban los Pitagóricos solían representarse como triángulos, cuadrados, pentágonos (estos serían sus "números naturales") pero también tenían una teoría de las proporciones para longitudes de segmentos. Si cada medida de longitud de un segmento se puede expresar por medio de un número, entonces la proporción entre dos medidas diferentes sería expresable por medio de la razón entre dos números (enteros).

Los pitagóricos trabajaban sólo con números racionales, creían que para cualesquiera segmentos AB y $A'B'$ existía un segmento UV que cabía un número entero de veces en cada uno de ellos, es decir, crían que cualesquiera dos segmentos eran conmensurables.

Fué precisamente un desdichado Pitagórico, llamado según se cree, Hipasso de Metaponto, el que descubrió los números irracionales. Hipasso sabía que su descubrimiento daba al traste con el Universo de los griegos y lo ocultó. Mas el secreto sólo duró unos meses ya que una hermosa mujer, traidora cual mujer, acechó, acorraló y sedujo al embriagado sabio y le arrancó el precioso secreto. El resultado no se hizo esperar: la congregación de los pitagóricos no soportó que el cielo les cayera en la cabeza, y aplicó toda clase de torturas para castigar al blasfemo. No con-

tentos con los estigmas causados por su ira en Hipasso de Metaponto, dos fuertes hombres lo echaron a un estanque repleto de pirañas hambrientas, muriendo Hipasso inmediatamente . . . o antes.

Como era de esperarse, el descubrimiento de la existencia del número irracional, constituyó una seria conmoción para la escuela Pitagórica y se cree que contribuyó a su destrucción. A partir del momento en que se descubrieron los irracionales, los griegos se apartaron de los números y dedicaron su atención a las líneas y superficies, entre las cuales no se suscitaban esas dificultades lógicas. El resultado fué el desarrollo de una geometría de las medidas que es tal vez la principal aportación de los griegos a las matemáticas.

Ejercicios 6.

1. Demuestre que $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$; $a + b \in \mathbb{Z}$, $a - b \in \mathbb{Z}$ y $a \cdot b \in \mathbb{Z}$.

2. Pruebe que $\forall\, r, s \in \mathbb{Q}$; $r + s \in \mathbb{Q}$, $r \cdot s \in \mathbb{Q}$, y si $s \neq 0$, $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$.

3. Probar que si $a \in \mathbb{Z}$ y $a < 0$, entonces $(a, a+1) \cap \mathbb{Z} = \varnothing$.

4. Demuestre que si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a < b$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a + n = b$.

5. Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $(a, b) \cap \mathbb{Z} = \varnothing$, entonces $b = a + 1$.

6. Demuestre que $\mathbb{Z}$ no está acotado superiormente y no está acotado inferiormente.

7. Pruebe que si $A \subseteq \mathbb{Z}$, $A \neq \varnothing$ y A está acotado superiormente, entonces A tiene máximo (Usar ejercicio 5.9).

8. Pruebe que si $A \subseteq \mathbb{Z}$, $A \neq \varnothing$ y A está acotado inferiormente, entonces A tiene máximo.

9. Si $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, definimos $|x^0 = 1|$ y, si $n \in \mathbb{N}$, $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$,

   (a) Compruebe que si $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$

(b) Demuestre las "leyes de los exponentes enteros" (puede usar el teorema 5.5): Sean $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $a, b \in \mathbb{Z}$. Entonces

I) $x^a x^b = x^{a+b}$.
II) $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$.
III) $(xy)^a = x^a x^b$.
IV) $(x^a)^b = x^{ab}$.

10. Calcule $\left[\frac{3}{7}\right]$, $\left[3\frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{-85}{3}\right]$, $[-3.1416]$, $\left[\sqrt{2}\right]$, $[-2^{15}]$.

11. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Demuestre las siguientes afirmaciones:

(a) $x - 1 < [x] \leqslant x$.
(b) $\forall\, a \in \mathbb{Z} : [x + a] = [x] + a$.
(c) $-[-x]$ es el elemento más pequeño no menor que x.
(d) $[x] + [y] \leqslant [x + y] \leqslant [x] + [y] + 1$ (use que $[x + +y]$ es el mayor entero menor o igual que $x + y \leqslant [x + y]$).
(e) $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
(f) $[2x] - 2[x] \in \{0, 1\}$ (use (d)).
(g) $\forall\, a \in \mathbb{Z} : \left[\frac{a}{2}\right] - \left[-\frac{a}{2}\right] = a$

12. Si $r, s \in \mathbb{Q}$ y $r < s$, halle explícitamente un racional t tal que $r < s < t$ (¿Qué tal "el promedio" de r y s?).

13. Compruebe que $4|-8$, que $-3|-6$, que $7|0$ y que $3 \not| 5$.

14. Demuestre (1), (2), (3), (4), (5) y (7) del teorema 3.6.4 (checar Enrique 2010).

15. **Definición 3.6.9** Sean a y b enteros que no son cero al mismo tiempo. El **Máximo Común Divisor** de a y b es el máximo de todos los divisores comunes de a y b . Este número se denotará como m.c.d.(a, b).

Sean a y b enteros que no son cero al mismo tiempo. Pruebe que:

(a) existe m.c.d.(a, b). (Use Teorema 3.6.7 y ejercicio 5.6).

(b) m.c.d.$(a, b) \geqslant 1$.

(c) m.c.d.$(a, b) =$ m.c.d.(b, a)

(d) m.c.d.$(a, b) =$ m.c.d.$(-a, b) =$ m.c.d.$(a, -b) =$ m.c.d.$(-a, -b)$ $=$ m.c.d.$(|a|, |b|)$. (Use teorema 3.6.4).

(e) m.c.d.$(a, b) = |a| \Leftrightarrow a|b$.

(f) m.c.d.$(a, 0) = |a|$ (si $a \neq 0$).

(g) $d =$ m.c.d. (a, b) si y solo si

i) $d|a$ y $d|b$.

ii) Si c es divisor común de a y b, $c|d$

16. Demostrar el Corolario 3.6.10

17. He aquí un procedimiento para hallar el máximo común divisor de dos números a y b usando el Teorema Fundamental de la Aritmética.

"Descomponga en factores primos a a y a b y escriba las descomposiciones de la forma:

$$a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$$

donde $p_1, \ldots, p_k$ son primos distintos entre sí.

$$b = q_1^{m_1} \cdot q_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot q_l^{m_l}$$

donde $q_1, \ldots, q_l$ son primos distintos entre sí.

Entonces m.c.d.(a, b) es el producto de todos aquellos primos que aparezcan en ambas descomposiciones, pero elevados al menor de los exponentes".

Ejemplo:

$$3500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7, \qquad 4400 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 11$$

Entonces m.c.d.$(3500, 4400) = 2^2 \cdot 5^2 = 100$.

Para formar este número no consideramos ni 7 ni 11 ya que no aparecen en ambas descomposiciones (en la de 3500 y en la de 4400)

Encuentre el el máximo común divisor y el el mínimo común múltiplo de las siguientes parejas de números, usando las descomposiciones en primos de ambos números. En los ejercicios (d) y (e) deje sus respuestas en forma factorizada:

a) 72 y 81.

b) 336 y 72.

c) 72000 y 18000.

d) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ y $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$.

e) $2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 11$ y $2^5 \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 11^2$.

18. Pruebe que el número que propuso como máximo común divisor en el ejercicio (d) lo es, en efecto.

    ¿Puede demostrar en general la regla dada en el problema 13?. ¡Inténtelo!

19. En cada uno de los ejercicios (a), (d) y (e) multiplique el máximo común divisor y el el mínimo común múltiplo de los números dados. ¿Qué obtiene en cada caso? ¡Compare con el producto de los números dados!. Trate de demostrar que, en general: m.c.d.$(a, b) \times$ m.c.m.$(a, b) = |ab|$.

20. **Definición 3.6.9** Un número entero m que es múltiplo de $a_1, \ldots, a_k$ y que tiene la propiedad de que todo múltiplo común de $a_1, \ldots, a_k$ es un múltiplo de m, se llama **mínimo común múltiplo** de $a_1, \ldots, a_k$ y se denota por m.c.m. $(a_1, \ldots, a_k)$.

    Se puede obtener el m.c.m. $(a_1, \ldots, a_k)$ usando, como en el caso en que $k = 2$, el teorema de factorización en primos.

    a) Halle m.c.m. $(32, 24, 14, 20)$.

    b) Encuentre el mínimo común denominador (o sea, el m.c.m. de los denominadores) en las siguientes fracciones:

    I) $\frac{1}{14}, \frac{3}{20}, \frac{7}{72}$.

    II) $\frac{1}{200}, \frac{3}{500}, \frac{1}{700}$.

    III) $\frac{1}{32}, \frac{1}{24}, \frac{1}{14}, \frac{1}{20}$.

    IV) $\frac{1}{400}, \frac{1}{600}, \frac{1}{900}, \frac{1}{800}$.

21. **Definición 3.6.10** Sean a y b enteros no cero al mismo tiempo. Si m.c.m. $(a,\, b) = 1$, se dice que a y b son **primos relativos**.

    a) Pruebe que a y b son primos relativos si y sólo si no tienen divisores comunes distintos de 1 y -1.

    b) Pruebe que si m.c.d. $(a,\, b) = 1$ y $a|bc$ entonces $a|c$. (*Sugerencia*: Sea $m =$ m.c.m. $(a,\, b)$ entonces $m = ab$ por el ejercicio 15. Pero $m|bc$ y $\ldots$, etc., etc., etc.,).

    c) Pruebe que si $r \in \mathbb{Q}\ \exists\, a,\, b \in \mathbb{Z} :\ \ r = \frac{a}{b}$ con a y b primos relativos.

22. **Definición 3.6.11** Un número entero es **par** si es divisible entre 2 y es **impar** o **non** si no es divisible entre 2.

    a) Pruebe que si $a \in \mathbb{Z}$ entonces a es par $\Rightarrow a^2$ es par.

    b) Justifique cada paso en la prueba de Aristóteles de que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: Supongamos que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \exists\, n,\, m \in \mathbb{N} \text{ tales que } \sqrt{2} = \tfrac{m}{n} \text{ y } (m,\, n) = 1\\
&\Rightarrow 2n^2 = m^2\\
&\Rightarrow m \text{ es par y } 2n^2 = m^2\\
&\Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{N} :\ \ m = 2a \text{ y } 2n^2 = 4a^2\\
&\Rightarrow m \text{ es par y } n^2 = 2a^2\\
&\Rightarrow m \text{ es par y } n \text{ es par}
\end{aligned}
$$

    y esto es una contradicción al hecho de que $(m,\, n) = 1$.

23. *a*) Suponga que a y b son enteros no cero al mismo tiempo. Pruebe que m.c.d. $(a,\, b) = 1 \Leftrightarrow$ m.c.d. $(a^2,\, b^2) = 1$.

    b) Demuestre que si $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$ o $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$. (*Sugerencia*: Si $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ pero $\sqrt{n} \notin \mathbb{Z}$, exprese $\sqrt{n}$ como $\frac{a}{b}$ donde $a,\, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 1$ y m.c.d. $(a,\, b) = 1$. Use (a) para llegar a una contradicción).

c) He aquí otra prueba de que $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ \sqrt{n} \in \mathbb{Z}$ o $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$, sin usar divisibilidad. Justifique cada paso.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Z}$ pero que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{Z} \text{ y } b \in \mathbb{N} \text{ tales que } \sqrt{n} = \frac{a}{b} \text{ y } b > 1.$$

Sea $m_0 = \text{mín}\, A$, donde

$$A = \left\{ m \in \mathbb{N} \,|\, m > 1 \text{ y } \exists\, l \in \mathbb{Z} : \sqrt{n} = \frac{l}{m} \right\}.$$

Sea $l \in \mathbb{Z}$ tal que $\sqrt{n} = \frac{l}{m_0}$ y $t = \left[\frac{l}{m_0}\right]$; entonces

$$\begin{aligned} l^2 = nm_0^2 &\Rightarrow l^2 - tlm_0 = nm_0^2 - tlm_0 \\ &\Rightarrow l(l - tm_0) = m_0(n - tl) \\ &\Rightarrow \sqrt{n} = \tfrac{l}{m_0} = \tfrac{n-tl}{l-tm_0}. \end{aligned}$$

Pero $l - tm_0 \neq 1$ y $t < \frac{l}{m_0} < t + 1 \Rightarrow m_0 t < l < m_0 t + m_0 \Rightarrow 0 < l - m_0 t < m_0$. Por lo tanto $l - m_0 t \in A$ y $l - m_0 t < m_0$ lo cual es una contradicción.

24. *a*) Pruebe que si $r \in \mathbb{Q} - \{0\}$, $\sqrt{2}\, r \notin \mathbb{Q}$.

b) Pruebe que si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x < y$ existe α irracional tal que $x < \alpha < y$. (*Sugerencia*: $x < y \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}$ y use la densidad de $\mathbb{Q}$).

25. Ahora sí, pruebe que $\sqrt{2}$ existe, es decir, que existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\beta \geq 0$ y $\beta^2 = 2$.

(*Sugerencia*: Sea $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0 \ \text{ y } \ x^2 < 2\}$. Demuestre que B tiene supremo. Sea $\beta = \sup B$; pruebe que $\beta^2 = 2$. Le pueden ser útiles muchísimas ideas de la prueba de que $\alpha = \sup\{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0 \text{ y } x^2 < 2\}$, ver páginas 157 y 158).

26. Evalúe la validez de la demostración del siguiente resultado.

Si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $y \in \mathbb{Q}$, entonces $z = x - y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Demostración: Supongamos que la conclusión no es cierta, es decir, que $z = x - y \in \mathbb{Q}$, entonces existen $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$ tales que

$z = \frac{a}{b}$. Como $\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ consideremos $x = \sqrt{2}$. Dado que $y \in \mathbb{Q}$, existen números enteros c y d con $d \neq 0$ y $y = \frac{c}{d}$. Por lo tanto

$$\sqrt{2} = x = y + z = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{ad + bc}{bd}$$

como $ad + bc$ y bd son enteros con $bd \neq 0$, se sigue que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, lo cual es una contradicción.

27. En este ejercicio suponga que "$\forall\, a \in \mathbb{R}_+$ existe una única raíz positiva de a, de grado n, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$, la cual será denotada por $\sqrt[n]{a}$."

    Se define para $a \in \mathbb{R}_+$ y $t = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ $\quad a^t = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

    (a) Pruebe que $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

    (b) Pruebe las leyes de los exponentes racionales:

    Para a, $b \in \mathbb{R}_+$ y t, $s \in \mathbb{Q}$.

    I) $a^t a^s = a^{t+s}$.

    II) $(a^t)^s = a^{ts}$.

    III) $(ab)^s = a^s + b^s$.

28. (a) Demuestre que si a es un número compuesto, tiene por lo menos un divisor primo menor o igual que $\sqrt{a}$.

    (b) Pruebe que todo número compuesto menor o igual que 100 es divisible entre un primo p menor o igual que 10.

    (c) Use (b) para hallar todos los primos entre 1 y 100 (escriba los números del 2 al 100 y tache los compuestos divisibles entre 2, 3, 5 y 7).

29. Dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son conmensurables, si existe un segmento $\overline{UV}$ que cabe un número entero de veces en $\overline{AB}$ y un número finito de veces en $\overline{CD}$, es decir, si existen naturales m y n tales que $|\overline{AB}| = m|\overline{UV}$ y $|\overline{CD}| = n|\overline{UV}|$ (dado un segmento cualquiera $\overline{LM}$, estamos denotando su longitud como $|\overline{LM}|$). Pitágoras pensaba que cualesquiera dos segmentos son conmensurables. En esto

basaba su teoría de la proporción y, por tanto, todos los teoremas de semejanza de triángulos.

(a) Demuestre que dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son conmensurables si y solo si $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \in \mathbb{Q}$.

(b) Demuestre que si $ABCD$ es un cuadrado, entonces la diagonal $\overline{AC}$ y el lado $\overline{AB}$ no son conmensurables.

30. Si $x, y \in \mathbb{R}$, demostrar que:

$$x = y \Leftrightarrow \forall\, r \in \mathbb{Q} : (r < x \Rightarrow r < y) \wedge (r > x \Rightarrow r > y) \wedge (r = x \Rightarrow r = y)$$

31. Usando el ejercicio anterior, probar que si $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \forall\, m, n \in \mathbb{N} \quad : \quad & (mb < na \Rightarrow md < nc) \wedge \\ (mb > na \Rightarrow md > nc) \quad \wedge \quad & (mb = na \Rightarrow md = nc) \end{aligned}$$

Esta fue la manera en que Eudoxio de Cnidus (408-355 a.c.) definió la igualdad de dos razones, lo que constituyó la piedra de la teória de las proporciones que sustituyó a la pitagórica

§7

3.7. Representación a-naria

(con el guión por favor)

Cuando dividimos un número entero a entre otro entero b distinto de cero, el resultado, como ya hemos mencionado, puede no ser un número

entero, pero siempre es factible efectuar una "división con residuo" como la que hacíamos en la primaria para obtener un cociente y un residuo:

$$\begin{array}{r|l} & c \\ \hline b & a \\ & r \end{array}$$

Hay veces en que conocer el cociente es importante, como cuando dividimos a manzanas entre b personas, pero también hay situaciones en las que el residuo es más importante que el cociente. Supongamos, por ejemplo, que queremos saber qué día de la semana será el primero de Enero del año 2000. Es fácil enterarse por el calendario que el primero de Enero de 1995 "cayó" en Domingo. Los cinco años que separan ambas fechas están formadas por $5.365 + 1$ días (el 1 es porque 1996 será año bisiesto), o sea 1862 días, los cuales forman 260 semanas y 6 días $\left(\begin{array}{r|l} & 260 \\ \hline 7 & 1826 \\ & 42 \\ & 06 \end{array}\right)$.

Al cabo de las 260 semanas volverá a ser Domingo y, con los 6 días más, el primero de Enero del año 2000 será sábado. Es evidente que para resolver el problema no tiene importancia precisamente cuántas semanas completas transcurrieron en 5 años y sólo nos interesa la cantidad de días restantes después de estas semanas.

A continuación enunciaremos (y demostraremos) la posibilidad de efectuar la "división con residuo" o "división completa" entre dos enteros, como un teorema importante. Esta sección viene a ser en realidad un estudio de dicho teorema y de algunas de sus más interesantes consecuencias.

Teorema 3.7.1 Algoritmo de la División *(con residuo)*
Sean a y b enteros, con $b \neq 0$. Entonces existen enteros únicos c, r tales que

$$a = bc + r \qquad y \qquad 0 \leq r < |b|.$$

Demostración: Sean a, $b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$. Probaremos primero la existencia de c y r.

(a) Supongamos que $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{N}$. Sea $c = \left[\frac{a}{b}\right]$. Entonces

$$c \leq \frac{a}{b} < c + 1 \;\Rightarrow\; bc \leq a < bc + b.$$

Si $r = a - bc$, se tiene $r \geq 0$ y $bc + r = a < bc + b$, es decir, $r < b$. Por lo tanto

$$a = bc + r, \quad \text{con} \quad 0 \leq r < b = |b|.$$

(b) Ahora supongamos que $a \in \mathbb{Z}$ y $b < 0$. Por lo hecho en el caso (a), existen enteros c' y r tales que $a = (-b)c' + r$, donde $0 \leq r < -b$. Por ende, $a = b(-c') + r$, con $0 \leq r < |b|$.

Demostraremos ahora la unicidad. Para ello supongamos que c, r, c' y r' son enteros tales que

$$a = bc + r \quad \text{y} \quad 0 \leq r < |b| \tag{3.14}$$
$$a = bc' + r' \quad \text{y} \quad 0 \leq r' < |b| \tag{3.15}$$

Por 3.14 y 3.15, $0 \leqslant r' < |b|$ y $-|b| < -r \leqslant 0$, así que $-|b| < r' - r < |b|$ y por lo tanto $|r' - r < |b|$. Pero $bc + r = bc' + r' \Rightarrow (c - c') = r' - r \Rightarrow |b||c - c'| = |r' - r|$, así que $|b||c - c'| < |b|$ y por consiguiente $0 \leqslant |c - c'| < 1$. Como $|c - c'| \in \mathbb{Z}$, $|c - c'| = 0$ (por Teorema 3.6.1), o sea, $c = c'$. De 3.14 y 3.15 se concluye que también $r = r'$. ■

Definición 3.7.1 Si a y b son enteros, $b \neq 0$ y c y r son los únicos enteros tales que $a = bc + r$ con $0 \leqslant r < |b|$, entonces c se llama el **cociente** y r el **residuo** que se obtienen al dividir a entre b.

Ejemplos:

1. Si $a = 17$ y $b = 5$, $\quad 17 = 5 \cdot 3 + 2$, así 3 es el cociente y 2 es el residuo que se obtienen al dividir 17 entre 5.

2. Si $a = -17$ y $b = 5$, $\quad \left[-\frac{17}{5}\right] = -4$ y entonces $-17 = 5(-4) + 3$.

3. Si $a = 17$ y $b = -5$, $\quad 17 = (-5)(-3) + 2$.

4. Si $a = -17$ y $b = -5$, $\quad -17 = (-5) \cdot 4 + 3$.

5. Si $b|a$ entonces existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = bc$. Por la unicidad en el teorema 3.7.1, esta ya es la "descomposición de a al dividirlo con residuo entre b". En este caso el residio es 0.

6. Si $a = 4$ y $b = 21$, entonces $4 = 0 \cdot 21 + 4$.

Observemos que para aplicar el algoritmo de la división a dos enteros a y b o, más explícitamente, para dividir con residuo a entre b, no es necesario que a sea mayor que b. Otro hecho que debemos subrayar y que se muestra en la demostración del algoritmo es que, cuando b es positivo, el cociente que dividir a entre b, es precisamente $\left[\frac{a}{b}\right]$, el mayor entero menor o igual que $\frac{a}{b}$. Este hecho nos permite demostrar nuestra siguiente observación, que redactaremos como un corolario del teorema 3.7.1 y que será usado posteriormente.

Corolario 3.7.2 *Sean b un entero mayor que 1 y $a \in \mathbb{N}$. Si c es el cociente que se obtiene al dividir a entre b, entonces*

$$a > c \geqslant 0.$$

Demostración: Si $a = bc + r$ con $0 \leqslant r < b$, como ya observamos, $c = \left[\frac{a}{c}\right]$. Por consiguiente, dado que $\frac{a}{b} > 0$ y $\frac{1}{b} < 1$, se concluye que

$$0 \leqslant c = \left[\frac{a}{b}\right] \leqslant \frac{a}{b} < a. \quad \blacksquare$$

Otro corolario del algoritmo de la división es un importante algoritmo para hallar el máximo común divisor de dos enteros y que era conocido desde tiempos de los pitagóricos allá por el año 600 a. de C. Aparece como la Proposición 2 del libro VII de los "Elementos" del gran Euclides.

Quizá desde entonces se llama *Algoritmo de Euclides*, y consiste en lo siguiente.

Sean a y b números naturales. Por el algorítmo de la división

$$a = bq_1 + r_1, \qquad 0 \leqslant r_1 < b. \tag{3.16}$$

Si $r_1 = 0$, entonces $b|a$ y m.c.d. $(a, b) = b$, y el proceso termina.
Si $r \neq 0$, dividiendo b entre r_1, obtenemos:

$$b = r_1 q_2 + r_2, \qquad 0 \leqslant r_2 < r_1. \tag{3.17}$$

Si $r_2 = 0$ entonces $r_1|b$ y por la igualdad (3.16), $r_1|a$. Si un entero d fuera tal que $d|a$ y $d|b$ entonces d dividiría a $r_1 = a - bq_1$. Así que $r_1 =$ m.c.d. (a, b) (ver ejercicio 12 (g) de "ejercicios 6").
Si $r_2 \neq 0$, el algoritmo de la división asegura que existen q_3 y r_3 tales que

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \qquad 0 \leqslant r_3 < r_2. \tag{3.18}$$

Si $r_3 = 0$, r_2 resultará ser el máximo común divisor de a y b, ya que

$$\begin{aligned} r_3 = 0 \;\Rightarrow\; r_2|r_1 &\overset{(3.17)}{\Rightarrow} r_2|r_1 q_2 + r_2 = b \text{ y } r_2|r_1 \\ &\overset{(3.16)}{\Rightarrow} r_2|bq_1 + r_1 = a. \end{aligned}$$

Por lo tanto $r_2|a$ y $r_2|b$, y si $d|a$ y $d|b$ entonces $d|r_1 = a - bq_1$ y $d|r_2 = b - r_1 q_2$.

Si $r_3 \neq 0$ se continúa el proceso de aplicar el algoritmo de la división. Mientras se sigan obteniendo residuos distintos de cero, el proceso tendrá que continuar, pero podemos asegurar que el proceso no es infinito, sino que habrá un primer residuo r_{k+1} que es cero, ya que los residuos que se van obteniendo satisfacen

$$b > r_1 > r_2 > r_3 > \cdots \tag{3.19}$$

y por lo tanto son naturales distintos que pertenecen al conjunto finito $\{0, 1, 2, 3, \ldots, b-1\}$.

Si ningún residuo fuera cero, la continuación eterna del procedimiento produciría un número infinito de residuos que satisfacen (3.19), lo cual no es posible. Entonces hay un residuo r_{k+1} que es cero y r_k resultará ser el máximo común divisor de a y b.

Teorema 3.7.3 ALGORITMO DE EUCLIDES
Dados los números naturales a y b, se hace una aplicación repetida del algoritmo de la división para obtener una serie de igualdades:

$$(\star)\begin{cases} a = bq_1 + r_1, & 0 < r_1 < b \\ b = r_1q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2q_3 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k, & 0 < r_k < r_{k-1} \\ r_{k-1} = r_kq_{k+1}. & \end{cases}$$

Entonces r_k, el último residuo diferente de cero, es el máximo común divisor de a y b.

Demostración: Ya se argumentó por qué existe tal residuo r_k. Vemos que $r_k = \text{m.c.d.}\,(a,\, b)$

Por la ecuación $r_{k-1} = r_kq_{k+1}$ vemos que $r_k | r_{k-1}$. Como $r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k$ se sigue que $r_k | r_{k-2}$. Subiendo a lo largo de las igualdades $(\star)$, hallamos que r_k divide a cada uno de los residuos que lo preceden. Entonces, dado que $b = r_1q_2 + r_2$, $r_k | b$, y dado que $a = bq_1 + r_1$, se tiene que $r_k | a$. Entonces r_k es divisor común de a y b. Supongamos que d es un divisor común de a y b, entonces d divide a $r_1 = a - bq_1$ y consecuentemente a $r_2 = b - r_1q_2$. Continuando hacia abajo la sucesión de ecuaciones $(\star)$, se encuentra que $d | r$, $d | r_4$, $d | r_5$, $\ldots$, $d | r_k$. Por lo tanto $r_k = \text{m.c.d.}\,(a,\, b)$. ■

Este resultado se puede extender a cualesquiera dos enteros a y b que no sean simultáneamente cero, ya que por el ejercicio 15(f) página 163, $\text{m.c.d.}\,(a,\, 0) = |a|$ y $\text{m.c.d.}\,(a,\, b) = \text{m.c.d.}\,(|a|,\, |b|)$.

Como ejemplo, sean $a = 963$ y $b = 657$.
Entonces

$$\begin{aligned} 963 &= 657 \cdot 1 + 306 \\ 657 &= 306 \cdot 2 + 45 \\ 306 &= 45 \cdot 6 + 36 \\ 45 &= 36 \cdot 1 + 9 \\ 46 &= 9 \cdot 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, m.c.d. $(963, 657) = 9$.

Observemos que para hallar el máximo común divisor de dos enteros aplicando el algoritmo de Euclides, el objetivo de la división con residuo es obtener precisamente un residuo y, en cada paso, el cociente sólo se considera como material de partida para las siguientes operaciones. Algo análogo ocurre en la representación de un número dentro de un cierto sistema de numeración posicional. Por ejemplo, es un hecho muy conocido por todos que el conjunto de símbolos que usamos comúnmente para representar los números naturales es el sistema *indo–arábigo*: se originó en la India y fue introducido en Europa por los árabes. En este sistema sólo necesitamos diez símbolos, a saber 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y cualquier otro número natural se puede expresar convenientemente usando una combinación de estos diez dígitos. Así cuando nosotros escribimos 23, esto no representa 2×3 ni $2 + 3$, sino $(2 \times 10) + 3$. También 6343 es el símbolo o "numeral" para $6 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 3$. La posición de cada dígito dentro del numeral es importante: En 6343, el 3 de la derecha representa 3, pero el otro representa $3 \times 10^2 = 300$.

Cada uno de nuestros numerales (símbolos para los números naturales) tienen la forma.

$$r_k \ \ldots \ r_2 \, r_1 \, r_0,$$

donde las r's son llamados dígitos y cada uno de ellos es uno de los numerales 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. El símbolo

$$r_k \ \ldots \ r_2 \, r_1 \, r_0$$

es el natural:

$$r_k \times 10^k \ + \ \ldots \ + \ r_2 \times 10^2 \ + \ r_1 \times 10 \ + \ r_0$$

y r_0 es llamado el dígito de las unidades, r_1 el de las decenas, r_2 el de las centenas, etc.

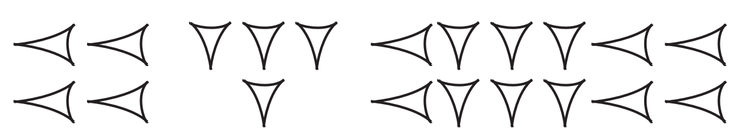
Todo número entero no negativo (y, con un bien puesto signo de menos, todo entero) puede ser expresado de esta manera como una suma de términos, cada uno de los cuales es uno de los números 0, 1, ..., 9 multiplicado por 10 elevado a algún exponente entero no negativo. Diez es la

base de nuestro sistema de numeración, que es llamado **sistema decimal** de numeración.

Es importante advertir que el papel tan privilegiado que desempeña el número 10, no se debe a que el 10 es un "número redondo" o que es muy fácil multiplicar por 10 cualquier número. Estas cualidades se deben precisamente a que se ha tomado como base de numeración, pero el sistema de decimal tardó mucho en ocupar la posición dominante que tiene actualmente. En distintos períodos históricos, muchos pueblos emplearon sistemas de numeración diferentes del decimal.

En la Babilonia antigua (2000 a. de C., aproximadamente), cuya cultura era bastante elevada, existía un sistema sexagesimal (de base 60) del que subsisten en la actualidad la división de la hora en 60 minutos de 60 segundos cada uno, y de la circunferencia en 360 grados.

El sistema de base 60 tenía un inconveniente derivado de su amplia base. Para representar cada número desde 1 hasta 59 (no conocían el cero), los mesopotamios tuvieron que idear 59 símbolos diferentes. Nadie, ni siquiera los sumerios y babilonios que habitaron Mesopotamia, quiso jamás aprender de memoria 59 nombres y 59 símbolos diferentes. Para superar esta dificultad utilizaron combinaciones de dos símbolos cuneiformes: uno que representa al 1, 𒁹 y otro que representa al 10: 𒌋. Así:

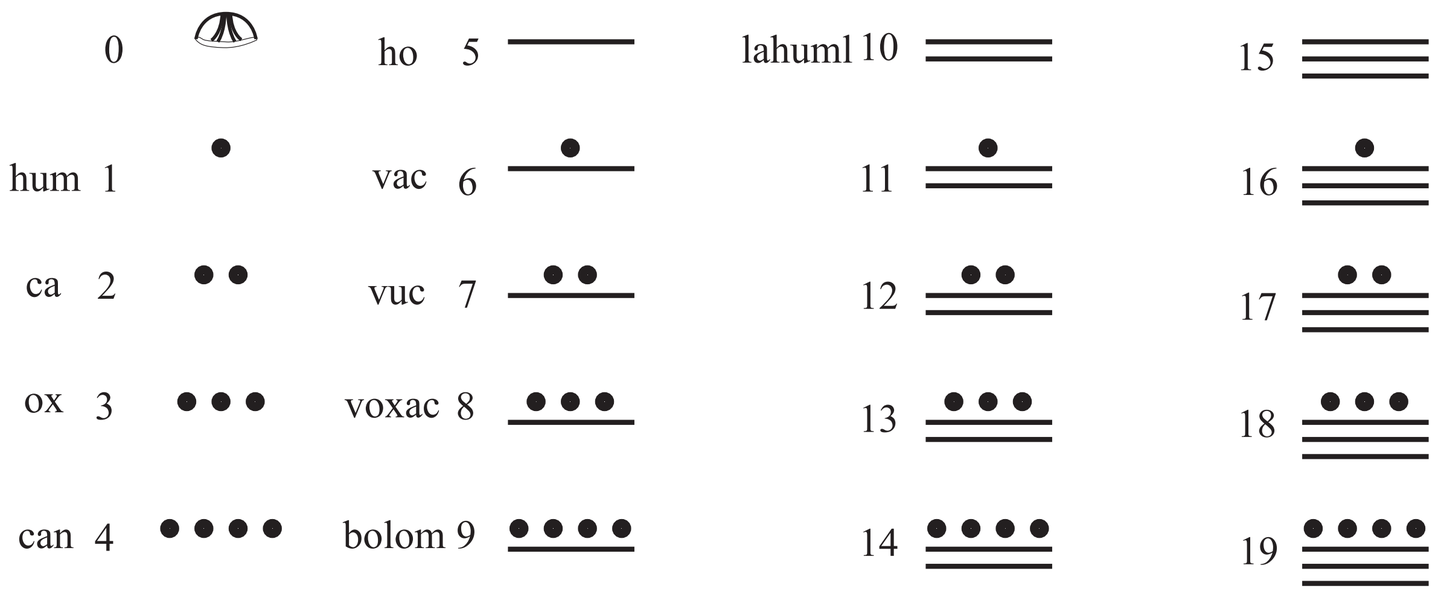


representa al número

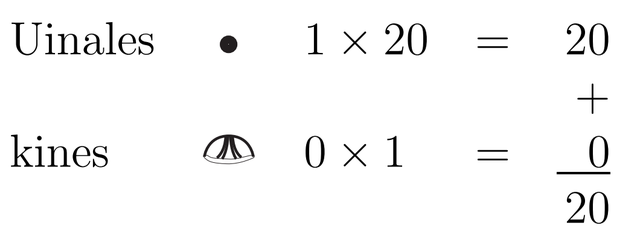
$$44 \times 60^2 + 26 \times 60 + 40 = 160\,000$$

Los nahoas y los mayas usaron el sistemas vigesimal (de base 20). El sistema maya empleaba símbolos para 0, 1, 2, 3, 4 y 5, que se agrupaban verticalmente para formar los signos numéricos compuestos hasta 19. Cada punto representa una unidad; cada barra representa cinco unidades:

Los números mayores emplean el cero y la posición vertical, apareciendo el valor de posición. Por ejemplo 20 se escribía con dos dígitos:

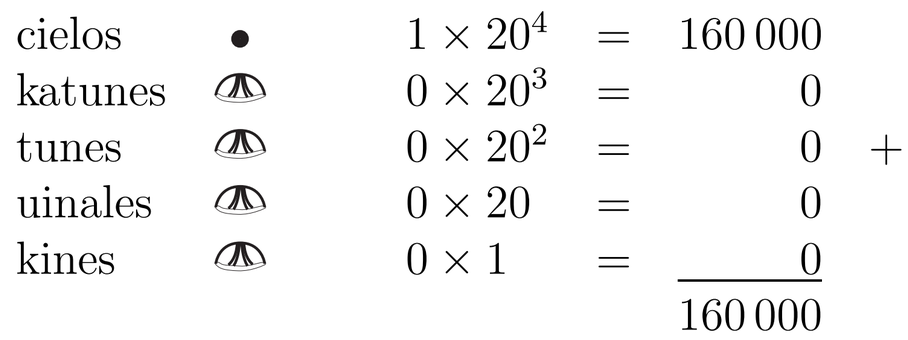


la posición inicial o de unidades (kines) tiene un cero en ella; la segunda posición (de las "veintenas" o uinales) tiene un uno en ella. El número completo se lee de arriba abajo como $1 \times 20 + 0 = 20$:



$$\begin{array}{lcrcr} \text{Uinales} & \bullet & 1 \times 20 & = & 20 \\ & & & & + \\ \text{kines} & \text{shell} & 0 \times 1 & = & \underline{\ 0} \\ & & & & 20 \end{array}$$

160 000 se escribe así en maya:



$$\begin{array}{lcrcrl} \text{cielos} & \bullet & 1 \times 20^4 & = & 160\,000 & \\ \text{katunes} & \text{shell} & 0 \times 20^3 & = & 0 & \\ \text{tunes} & \text{shell} & 0 \times 20^2 & = & 0 & + \\ \text{uinales} & \text{shell} & 0 \times 20 & = & 0 & \\ \text{kines} & \text{shell} & 0 \times 1 & = & \underline{\qquad 0} & \\ & & & & 160\,000 & \end{array}$$

¿Cómo expresarían los mayas el número 41033? Para responder, tendríamos que expresar primero dicho número en base 20, es decir, en la forma:

$$r_k \times 20^k + r_{k-1} \times 20^{k-1} + \cdots + r_2 \times 20^2 + r_1 \times 20 + r_0, \qquad (3.20)$$

donde r_0, r_1, …, r_k son enteros no negativos menores que 20. Para hacerlo podemos auxiliarnos del algorítmo de la división: Comencemos dividiendo 41033 entre 20

$$\begin{array}{r|l} & 2051 \\ \hline 20 & 41033 \\ & 103 \\ & 033 \\ & 13 \end{array} \quad \text{o sea: } 41033 = (2051) \times 20 + 13 \tag{3.21}$$

Como $2051 > 0$, volvemos a dividir:

$$\begin{array}{r|l} & 102 \\ \hline 20 & 2051 \\ & 051 \\ & 11 \end{array} \quad \text{o sea: } 2051 = 102 \times 20 + 11 \tag{3.22}$$

Como $102 > 0$, volvemos a dividir:

$$\begin{array}{r|l} & 5 \\ \hline 20 & 102 \\ & 2 \end{array} \quad \text{o sea: } 102 = 5 \times 20 + 2 \tag{3.23}$$

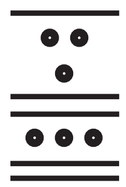
Como $5 > 0$, volvemos a dividir:

$$\begin{array}{r|l} & 0 \\ \hline 20 & 5 \\ & 5 \end{array} \quad \text{o sea: } 5 = 0 \times 20 + 5 \tag{3.24}$$

Como el último cociente es 0, ya no dividimos más, porque ya acabamos. En efecto, combinando nuestras 4 igualdades obtenemos la representación de 14033 en la forma (3.20):

$$\begin{aligned} 41033 &= 2051 \times 20 + 13 = (102 \times 20 + 11) \times 20 + 13 = \\ &= 102 \times 20^2 + 11 \times 20 + 13 = \\ &= (5 \times 20 + 2) \times 20^2 + 11 \times 20 + 13 = \\ &= 5 \times 20^3 + 2 \times^2 + 11 \times 20 + 13. \end{aligned}$$

Aquí $r_0 = 13$, $r_1 = 11$, $r_2 = 2$, $r_3 = 5$. 41033 escrito por los mayas quedaría:



o sea 13 kines + 11 uinales + 2 tunes + 5 katunes.

Notemos que en la expresión

$$41033 = 5 \times 20^3 + 2 \times 20^2 + 11 \times 20 + 13,$$

los números $r_0 = 13$, $r_1 = 11$, $r_2 = 2$ y $r_5 = 5$ que acompañan a las potencias de 20, son precisamente *los residuos* que se van obteniendo al aplicar reiteradamente el algoritmo de la división.

En el procedimiento descrito para escribir 41033 en la forma (3.20), o sea en base 20, bien puede hacerse si comenzamos, en vez de con 20 un número natural a mayor que 1 y, en vez de con 41033, con cualquier número natural n:

Aplicando el algoritmo de la división, tendríamos:

$$n = a\,q_0 + r_0, \qquad 0 \leq r_0 < a \tag{3.25}$$

Si $q_0 = 0$, detenemos el proceso. Si $q_0 > 0$, continuamos aplicando el algoritmo de la división, pero ahora a q_0 y a a:

$$q_0 = a\,q_1 + r_1, \qquad 0 \leq r_1 < a \tag{3.26}$$

Si $q_0 = 0$, nos detenemos. Si $q_1 > 0$, continuamos con q_1 y a:

$$q_1 = a\,q_2 + r_2, \qquad 0 \leq r_2 < a \tag{3.27}$$

Si $q_1 = 0$, ahi le paramos. Si $q_2 > 0$, seguimos:

$$q_2 = a\,q_3 + r_3, \qquad 0 \leq r_3 < a \tag{3.28}$$

En algún momento obtendremos un cociente q_k que es 0 y ahi le paramos. La $k-$ésima igualdad sería:

$$q_{k-1} = a \cdot 0 + r_k, \qquad 0 \leq r_k < a \tag{3.29}$$

Combinando las igualdades (3.25), (3.26), ..., (3.29), obtenemos

$$\begin{aligned} n &= a\,q_0 + r_0 = a(a\,q_1 + r_1) + r_0 = a^2 q_1 + a\,r_1 + r_0 \\ &= a^2(a\,q_2 + r_2) + a\,r_1 + r_0 = a^3 q_2 + a^2 r_2 + a\,r_1 + r_0 = \cdots = \\ &= a^k q_{k-1} + a^{k-1} r_{k-1} + \cdots + a\,r_1 + r_0 \\ &= a^k r_k + a^{k-1} r_{k-1} + \cdots + a\,r_1 + r_0 \end{aligned}$$

y esta es ya la representación de n en base a. Obervemos que la posibilidad de llegar a tal representación del modo en que acabamos de hacerlo, depende de dos afirmaciones que hemos usado sin justificarlas para no estorbar la exposición:

(1) Que los cocientes q_0, q_1, q_2, ..., que fuimos obteniendo, son enteros no negativos. Esto se sigue inmediatamente del corolario 3.7.2 (página 171).

(2) Que el proceso descrito se acaba porque en algún momento obtenemos un cociente q_k que es 0.

En efecto, usando las igualdades (3.25), (3.26), ..., y el mismo corolario 3.7.2, vamos obteniendo las siguientes desigualdades:

$$n > q_0 \geq 0 \tag{3.30}$$

y si $q_0 > 0$, por (3.26) y el corolario,

$$q_0 > q_1 \geq 0 \tag{3.31}$$

y si $q_1 > 0$, por (3.27) y el corolario,

$$q_1 > q_2 \geq 0 \tag{3.32}$$

y si $q_2 > 0$, etc., etc., etc.

Entonces los cocientes q_0, q_1, q_2, ...son enteros no negativos que satisfacen

$$n > q_0 > q_1 > q_2 > \cdots$$

y sólo puede haber un número finito de ellos, dado que son elementos distintos del conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Por eso en algún momento del proceso, un cociente q_k debe ser cero. De otro modo el proceso continuaría *per sécula seculorum*, produciendo un número infinito de elementos distintos del conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Ahora sí, hemos hecho una demostración completa de que si a es un entero mayor que 1 y n es natural, existe un número finito de enteros $r_0, \ldots, r_k$, no negativos y menores que a tales que

$$n = a^k r_k + a^{k-1} r_{k-1} + \cdots + a r_1 + r_0. \tag{3.33}$$

Debe advertirse que si existiera una segunda expresión

$$n = a^l s_l + a^{l-1} s_{l-1} + \cdots + a s_1 + s_0. \tag{3.34}$$

obtenida por algún otro procedimiento, y en la cual $s_0, s_1, \ldots, s_l$ son enteros no negativos menores que a, resultaría que $l = k$ y que $r_0 = s_0$, $r_1 = s_1, \ldots, r_k = s_k$. En efecto, por (3.33) y (3.34), tendremos:

$$n = a(a^{k-1} r_k + a^{k-2} r_{k-1} + \cdots + r_1) + r_0$$

y

$$n = a(a^{l-1} s_l + a^{l-2} s_{l-1} + \cdots + s_1) + s_0$$

Como $0 \leq r_0 < a$ y $0 \leq s_0 < a$, r_0 y s_0 son los residuos que se obtienen al aplicar el algoritmo de la división para dividir n entre a. Pero el residuo que se obtiene al aplicar tal algoritmo es único, así que $r_0 = s_0$. Como también es único el cociente, se tiene:

$$a^{k-1} r_k + a^{k-1} r_{k-1} + \cdots + r_1 = a^{l-1} s_l + a^{l-1} s_{l-1} + \cdots + s_1,$$

o sea:

$$a(a^{k-2} r_k + \cdots + r_2) + r_1 = a(a^{l-2} s_l + \cdots + s_2) + s_1$$

y nuevamente, por la unicidad del cociente y del residuo que afirma el teorema 3.7.1, obtenemos:

$$r_1 = s_1$$

y

$$a^{k-2} r_k + \cdots + r_2 = a^{l-2} s_l + \cdots + s_2$$

y así sucesivamente. Damos al lector la posibilidad de que termine la demostración él mismo. esp

Resumamos nuestros comentarios en este importante teorema sobre la representación de números naturales:

Teorema 3.7.4 *Sea a un número natural mayor que 1. Entonces todo número natural n puede ser representado de manera única en la forma*

$$n = r_k a^k + r_{k-1} a^{k-1} + \cdots + r_1 a + r_0,$$

donde k es algún entero no negativo y r_0, r_1, ..., r_k son enteros no negativos menores que a.

Definición 3.7.2 Sean a y n como en el teorema 3.7.4. En la expresión

$$n = r_k a^k + r_{k-1} a^{k-1} + \cdots + r_1 a + r_0, \qquad 0 \leq r_i < a,$$

a se llama la **base (o raíz)** de la representación y la expresión misma se llama **representación de n en base a** o **representación $a-$naria de n**. r_0, r_1, ..., r_k son los **dígitos** de la representación.

Como en el caso de la representación decimal, es conveniente abreviar $r_k a^k + r_{k-1} a^{k-1} + \cdots + r_1 a + r_0$ con el símbolo:

$$(r_k\, r_{k-1}\, \ldots,\, r_1)_a.$$

La desventaja de esta última notación es que si $a > 10$, entonces debemos introducir nuevos símbolos para los números que en notación decimal son 10, 11, 12, ..., $a - 1$, si aparecen como dígitos de la representación. El uso de 10, 11, 12, ..., $a - 1$ podría dar lugar a confusión. Por ejemplo, el número 160 000 en base 60 tiene la siguiente representación:

$$160\,00 = 44 \times 60^2 + 26 \times 60 + 40.$$

Aquí $r_0 = 40$, $r_1 = 26$ y $r_2 = 44$. En la notación abreviada quedaría:

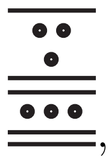
$$(44\,60\,40)_{60}$$

que puede confundirse con:

$$4 \times 60^5 + 4 \times 60^4 + 2 \times 60^3 + 6 \times 60^2 + 4 \times 60 + 0.$$

Suele solucionarse este problemar escribiendo entre paréntesis los dígitos mayores que 10. Así:

$$(160\,000)_{10} = ((44)(26)(40))_{60}.$$

El número 41 033 que maya se escribiría:  , quedaría representado por nosotros así:

$$(5\,2\,(11)(13))_{20}.$$

En algunos textos (cuando la base a no excede mucho de 10) prefieren usar letras: A para 10, B para 11, C para 12, etc.: $(7\text{A}1\text{B}0)_{12}$ representa $7 \cdot 12^4 + 10 \cdot 12^3 + 1 \cdot 12^2 + 11 \cdot 12 + 0$.

La demostración del teorema 3.7.4 (descrita en las páginas 160 y 161) no da la forma de pasar un número escrito en base 10 a otra base cualquiera.

Ejemplos:

1. Escribir $(7\,2\,2)_{10}$ es sistema binario (o de base 2). Las cifras del sistema binario son los números 0 y 1. Tenemos que escribir 722 por medio de los números 0 y 1. Para que sea más fácil calcular los residuos r_0, r_1, ..., r_k al dividir entre dos reiteradamente, vamos a "llenar" una tabla de dos columnas: en la izquierda figurarán los cocientes q_0, q_1, ..., q_k y en la de la derecha los residuos r_0, r_1, ..., r_k. Así queda nuestro ejemplo:

	722		
q_0	361	0	r_0
q_1	180	1	r_1
q_2	90	0	r_2
q_3	45	0	r_3
q_4	22	1	r_4
q_5	11	0	r_5
q_6	5	1	r_6
q_7	2	1	r_7
q_8	1	0	r_8
q_9	0	1	r_9

   Entonces: $(722)_{10} = (1011010010)_2$

2. Escribir $(722)_{10}$ en sistema duodecimal (base 12). Las cifras serán los números 0, 1, 2, ..., 9, A, B. Procediendo como en el ejemplo anterior, obtenemos:

722	
60	2
5	0
0	5

   Entonces: $(722)_{10} = (502)_{12}$

3. Escribir $(722)_{10}$ en sistema 722−nario. La tabla en este caso es:

$$\begin{array}{r|l} 722 & \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

o sea: $(722)_{10} = (10)_{722}$

4. En general, en el sistema $a-$nario, a se escribe como $(10)_a$. Por consiguiente, para multiplicar por a (o sea por $(10)_a$) un número escrito en el sistema $a-$nario, basta agregarle un cero a la derecha, exactamente como en el sistema decimal. Por ejemplo

$$(1011010010)_2 \times (10)_2 = (10110100100)_2$$

$$(205)_{12} \times (10)_{12} = (2050)_{12}$$

$$\begin{aligned} (r_k\, r_{k-1}\, \cdots\, r_1\, r_0)_a \times (10)_a &= (r_k a^k + r_{k-1}a^{k-1} + \cdots + r_1 a + r_0) \times a = \\ &= r_k a^{k+1} + r_{k-1}a^k + \cdots + r_1 a^2 + r_0 a + 0 = \\ &= (r_k\, r_{k-1}\, \ldots\, r_1\, r_0\, 0)_a \end{aligned}$$

5. Las mismas reglas de adición, multiplicación y resta "en columnas" y de división "en ángulo" que usamos en el sistema decimal, son válidas para números escritos en cualquier otra base. Sumamos (en el caso de la adición) primero las unidades, pasamos luego al orden siguiente y así sucesivamente hasta llegar al mayor de los órdenes, con la particularidad de que se hace un traslado al orden siguiente cada vez que en un orden se obtiene una suma mayor o igual a la base del sistema empleado. Por ejemplo

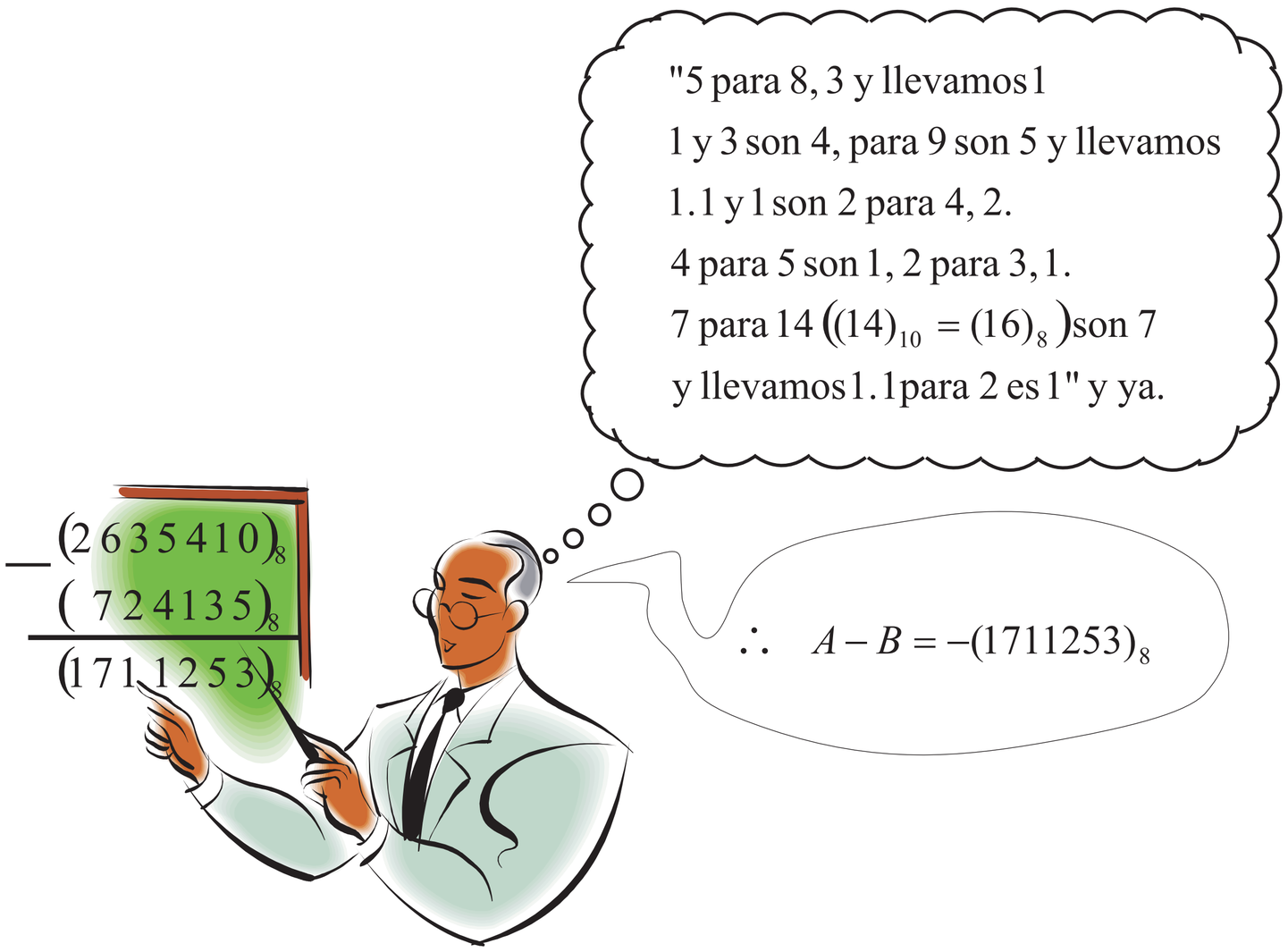
a)
$$\begin{array}{r} (23651)_8 \\ +(17043)_8 \\ \hline (42714)_8 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} (423)_6 \\ (1341)_6 \\ (521)_6 \\ \hline (3125)_6 \end{array}$$

Si $A = (r_n\, r_{n-1}\, \ldots\, r_1\, r_0)_a$ y $B = (s_m\, s_{m-1}\, \ldots\, s_1\, s_0)_a$, para calcular la diferencia A_B hay que resolver primero cuál de los dos números es mayor: si $n > m$, entonces $A > B$; si, por el contrario, $n < m$ será, como es natural, $A < B$. Si $n = m$ hay que comparar r_n con s_m: si $r_n > s_m$ entonces $A > B$, si $r_n < s_m$, será $A < B$. Si $r_n = s_m$, hay que comparar r_{n-1} con s_{m-1} y así sucesivamente. Si se establece que $r_n = s_m$, $r_{n-1} = s_{m-1}$, $r_{n-2} = s_{m-2}$, $\ldots$, $r_1 = s_1$, $r_0 = s_0$ entonces

$A = B$ y $A - B$ será cero. Ahora bien, si $A < B$, para calcular $A - B$ hay que buscar la diferencia $B - A$ y después poner delante de la respuesta el signo menos. Por ejemplo, en la base octal (base ocho), calcular A_B, donde $A = (724135)_8$ y $B = (2635410)_8$. Como B tiene más dígitos que A, $B > A$. Hallemos entonces $B - A$:

$$\begin{array}{r} (2635410)_8 \\ (\ 724135)_8 \\ \hline (1711253)_8 \end{array}$$



La multiplicación se basa en la tabla de multiplicar que ofrece el producto de los números menores que la base del sistema de numeración. En el sistema senario (base 6), la tabla es:

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

En cada celda aparece el producto de los números que corresponden a la fila y a la columna de dicha celda, tomando en cuenta que todos los números están escritos en el sistema senario (se omite el subíndice 6 para no complicar la tabla).

Valiéndose de esta tabla, podemos multiplicar fácilmente en base 6: (el lector debe comprobar la siguiente "cuenta" pasando a base 10).

$$\begin{array}{r} (3\,5\,2)_6 \\ \times\,(2\,4\,5)_6 \\ \hline (3\,1\,2\,4)_6 \\ (2\,3\,3\,2)_6 \\ (1\,1\,4\,4)_6 \\ \hline (1\,4\,5\,2\,4\,4)_6 \end{array}$$

6. Al preguntarle cuántos alumnos había en su clase, un maestro respondió: "100 alumnos, y de ellos 24 son varones y 36, hembras". Primero nos extrañó la respuesta y hasta nos espantó la posibilidad de que 40 estudiantes no tuvieran definido su sexo, pero luego comprendimos que l maestro no empleó el sistema decimal ¿Qué sistema había empleado?

   La solución es sencilla. Sea x la base del sistema usado por el maestro. Entonces

$$(24)_x + (36)_x = (100)_x$$

es decir:

$$2x + 4 + 3x + 2 = x^2,$$

o sea,

$$x^2 - 5x - 6 = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son $x_1 = 6$ y $x_2 = -1$, y la de nuestro probema es, por supuesto, $x = 6$.

7. "Un número escrito en base 10 es divisible entre 3 si la suma de sus dígitos es divisible entre 3", reza una famosa regla de divisibilidad. Ello se debe a que todo número de la forma 10^m, al dividirse entre 3, da residuo igual a 1:

$$10^m = 3 \times \underbrace{333\ldots3}_{m \text{ veces}} + 1$$

Entonces, dado $n = (r_k\, r_{k-1}\, \ldots\, r_1\, r_0)_{10}$, existen $b_1, \ldots, b_k$ tales que $10 = 3b_1 + 1$, $100 = 3b_2 + 1$, $\ldots$, $10^k = 3b_k + 1$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned}(r_k\, r_{k-1}\, \ldots\, r_1\, r_0)_{10} &= r_k \cdot 10^k + r_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + r_1 \cdot 10 + r_0 \\ &= r_k(3b_k + 1) + r_{k-1}(3b_{k-1} + 1) + \cdots + r_1(3b_1 + 1) + r_0 \\ &= (r_k + r_{k-1} + \cdots + r_0) + 3(r_k\, b_k + \cdots + r_1\, b_1) \\ &= (r_k + r_{k-1} + \cdots + r_0) + B,\end{aligned}$$

donde B es un número entero divisible entre 3.

Por lo tanto, para que un natural n sea divisible entre 3, es necesario y suficiente que $r_k + r_{k-1} + \cdots + r_0$ sea divisible entre 3.

Este criterio no se cumple en otras bases. Por ejemplo, $(86)_{10} = (126)_8$ y la suma de las cifras de $(126)_8$ es $1 + 2 + 6 = 9$ que es divisible entre 3. Sin embargo, 86 no es divisible entre 3 (o lo que es lo mismo: $(126)_8$ no es divisible entre $(3)_8$).

2 es el menor de los números que se puede tomar como base de un sistema de numeración. El sistema correspondiente a esta base, llamado binario, tiene un defecto: para medir números aún no muy grandes, hay que emplear muchos dígitos. Sin embargo, este defecto es compensado por una serie de ventajas entre las que se encuentran:

I) Las operaciones de adición y multiplicación son particularmente simples en forma binaria.

II) La mayoría de los componentes básicos de las modernas computadoras (lámparas, semiconductores, switches, diodos, rectificadores, relays, etc.) se caracterizan por la existencia de dos posiciones estables, es decir, ellos están siempre en uno de dos estados que corresponden convenientemente a los dígitos 0 y 1 de un número binario.

III) Además de la sencillez en la ejecución de las operaciones aritméticas en el sistema binario importa, para la construcción de una computadora, lo que suele denominarse capacidad del sistema, entendiéndose por tal el conjunto de números que en este sistema puede ser escrito con una cantidad determinada de dígitos. Expliquemos esto con un ejemplo: Para escribir en el sistema decimal 1000 números (de 0 a 999), se necesitan 30 dígitos (10 para las unidades, 10 para las decenas y 10 para las centenas). En cambio en el sistema binario, con 30 dígitos se pueden escribir 2^{15} números (para cada posición u orden binario hacen falta sólo dos cifras 0 o 1 y, por eso 30 dígitos permiten escribir números que contienen hasta 15 órdenes binarios). Como $2^{15} > 1000$, el sistema binario tiene mayor capacidad que el decimal.

Por estas ventajas, entre otras, es que el sistema binario se ha difundido mucho en distintas ramas de la técnica y en particular en las computadoras.

Hemos demostrado, en esta sección, que todo número natural tiene una representación $a-$naria (teorema 3.7.4). Esta propiedad se puede extender a todos los números enteros. dado que 0 ya esta escrito en la forma:

$$r_k a^k + r_{k-1} a^{k-1} + \cdots + r_1 a + r_0$$

donde k es un entero no negativo y $r_0, r_1, \ldots, r_k$ son enteros no negativos y menores que a. En el caso de cero, $k = 0$ y $r_0 = 0$. Es decir, para cualquier entero $a > 1$, la representación de cero en base a es: 0.

Y si m es un entero negativo ¿Cuál es su representación $a-$naria?. Pues esta:

$$m = -(r_k a^k + r_{k-1} a^{k-1} + \cdots + r_1 a + r_0),$$

donde $r_k a^k + \cdots + r_1 a + r_0$ es la representación $a-$naria del natural $-m$.

Y ...¿Cuál sería la representación $a-$naria de un número racional que no fuera entero?, o ¿acaso los quebrados no tienen este tipo de representación?. Veamos el caso de la representación decimal.

Cuando se habla de representación decimal, no sólo se piensa en la de los números enteros, sino que también nos vienen a la mente expresiones como estas:

$$1.04,\ 311.001,\ -11.9999,\ 3.1416,$$

en donde aparece el famosísimo "punto decimal". Al igual que en el caso de la representación decimal de enteros, las expresiones con punto decimal tienen que ver con las potencias de 10. En nuestro ejemplo se tiene:

$$1.04 = 1 + \frac{0}{10} + \frac{4}{100} = 1 + 0 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2}$$

$$\begin{aligned} 311.001 &= 3 \times 10^2 + 1 \times 10 + 1 + \tfrac{0}{10} + \tfrac{0}{10^2} + \tfrac{1}{1000} \\ &= 3 \times 10^2 + 1 \times 10 + 1 + 0 \times 10^{-1} + 0 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -11.999 &= -\left(1 \times 10 + 1 + \tfrac{9}{10} + \tfrac{9}{100} + \tfrac{9}{1000}\right) \\ &= -(1 \times 10 + 1 + 9 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$$3.1416 = 3 + \frac{4}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{6}{10^4}$$

Expresiones de este tipo reciben un nombre especial:

Definición 3.7.3 Una **fracción decimal** es un número racional r que, o se puede escribir de la forma:

$$b_k 10^k + b_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + b_1 10 + b_0 + c_1 10^{-1} + c_2 10^{-2} + \cdots + c_l 10^{-l}, \quad (3.35)$$

donde k es un entero no negativo, l es un natural y $b_0, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_l$ son enteros no negativos menores que 10, o bien, r es el inverso aditivo de un número que se puede escribir en dicha forma.

La expresión (3.35) se denota por:

$$b_k b_{k-1} b_{k-2} \cdots b_1 b_0 \ . \ c_1 c_2 \cdots c_l$$

Es fácil ver que toda fracción decimal se puede escribir en la forma $\frac{d}{10^m}$, donde $d \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$, pues si:

$$r = b_k b_{k-1} b_{k-2} \cdots b_1 b_0 \ . \ c_1 c_2 \cdots c_{l-1} c_l,$$

poniendo $m = l$ y $d = 10^l r$, se tiene que

$$d = 10^l r = b_k b_{k-1} \cdots b_1 b_0 c_1 c_2 \cdots c_{l-1} c_l$$

(se "recorrió" el punto decimal l lugares).
Entonces d es un número entero y $r = \frac{d}{10}$.

Análogamente, si $r = -(b_k b_{k-1} \cdots b_1 b_0 \ . \ c_1 c_2 \cdots c_l)$, entonces

$$r = \frac{-(b_k b_{k-1} \cdots b_0 c_1 \cdots c_l)}{10^l}$$

La afirmación inversa también es cierta: que todo racional r de la forma $\frac{d}{10^m}$, donde $d \in \mathbb{Z}$ y m es un natural entonces r es una fracción decimal. Este hecho es una sencilla consecuencia del teorema 3.7.4 (representación $a-$naria), pues basta dividir la representación decimal del entero d entre 10^m. Hagámoslo con unos ejemplos:

$$\begin{aligned} \tfrac{345}{10^2} &= \tfrac{3\times 10^2+4\times 10+5}{10^2} = \tfrac{3\times 10^2}{10^2} + \tfrac{4\times 10}{10^2} + \tfrac{5}{10^2} \\ &= 3 + \tfrac{4}{10} + \tfrac{5}{10^2} = 3.45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{-52867}{10^6} &= \tfrac{-(5\times 10^4+2\times 10^3+8\times 10^2+6\times 10+7)}{10^6} \\ &= -\left(\tfrac{5}{10^2} + \tfrac{2}{10^3} + \tfrac{8}{10^4} + \tfrac{6}{10^5} + \tfrac{7}{10^6}\right) = -(0.052867) \end{aligned}$$

Podemos entonces afirmar que:

Teorema 3.7.5 *Un número racional r es una fracción decimal y si y sólo si puede ser escrito en la forma $\frac{d}{10^m}$, donde $d \in \mathbb{Z}$ y m es algún natural.*

Por ejemplo, sea $r = \frac{a}{b}$, donde $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{N}$. Supongamos que los únicos divisores primos de b son 2 y 5. Tendremos entonces que $b = 2^\alpha \cdot 5^\beta$ donde α y β son enteros no negativos. Si $m = \max\{\alpha, \beta\}$ entonces

$$2^{m-\alpha}5^{m-\beta}b = 2^m 5^m = 10^m,$$

así que

$$r = \frac{a}{b} = \frac{2^{m-\alpha}5^{m-\beta}a}{2^{m-\alpha}5^{m-\beta}b} = \frac{d}{10^m}.$$

Concluimos entonces que:

Un racional $\frac{a}{b}$ en donde b es un natural cuyos únicos factores primos son 2 y 5, es una fracción decimal.

Ejemplos:

$$\frac{1}{5} = 0.2, \qquad \frac{3}{40} = 0.075, \qquad -\frac{1}{2} = -(0.5)$$

Pero ¿qué pasa con números escritos en la forma $\frac{a}{b}$ en donde b tiene un divisor primo que no es 2 ni es 5? De que los hay, los hay. Por ejemplo: $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{7}$, $-\frac{1}{6}$, $\frac{7}{30}$. Resultan no ser fracciones decimal. Veamos la razón: Supongamos que $r = \frac{a}{b}$ es un racional tal que $b \in \mathbb{N}$ y a y b son primos relativos (o sea que a y b no tienen divisores comunes, o lo que es lo mismo, que $1 = \text{m.c.d.}\,(a, b)$, ver ejercicio $21a$) página 165). Entonces la igualdad

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{10^m} \qquad \text{con } d \in \mathbb{Z} \text{ y } m \in \mathbb{N}$$

nos llevaría a $a \times 10^m = bd$.

Si b tiene un divisor primo p que no es ni 2 ni 5, entonces $b = p\,k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y

$$a \times 10^m = p \cdot k \cdot d.$$

Por lo tanto $p|a \cdot 10^m$ y por eso $p|10^m$ (ejercicio 21b) página 165). Entonces $p|2^m 5^m$ y esto implica que $p = 2$ ó $p = 5$, lo cual es falso. Por lo tanto r no se puede escribir en la forma $\frac{d}{10^m}$. Resumiendo:

Teorema 3.7.6 *Un racional $r = \frac{a}{b}$, con $b \in \mathbb{N}$ y a y b primos relativos es una fracción decimal si y sólo si los únicos divisores primos de b son 2 y 5.*

Así que, definitivamente, números tan bonitos, sencillos e importantes como $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$ y $\frac{4}{9}$ no se pueden representar en la forma

$$b_k 10^k + b_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + b_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_l}{10^l}.$$

Sin embargo todo número racional, e incluso todo número irracional pueden ser aproximados por una fracción decimal.

Ejemplos:

1. $0.3 = \frac{3}{10} \quad < \quad \frac{1}{3} \quad < \quad \frac{4}{10} = 0.4$

   $0.33 = \frac{33}{10^2} \quad < \quad \frac{1}{3} \quad < \quad \frac{34}{100} = 0.34$

   $0.333 = \frac{333}{10^3} \quad < \quad \frac{1}{3} \quad < \quad \frac{334}{10^3} = 0.334$

   Entonces $\frac{1}{3}$ difiere de la fracción decimal de n dígitos: $0.333\ldots3$ en menos que $\frac{1}{10^n}$.

2. Es posible aproximar $\sqrt{2}$ por "ensayo y error". Notemos que $1^2 = 1 < 2$ y $2^2 = 4 > 2$. Parece plausible entonces que $\sqrt{2}$ está entre una pareja de fracciones decimales $1.b$ y $1.(b+1)$, donde $0 \leq b < b+1 \leq 9$. Por ensayo obtenemos:

   $$(1.1)^2 = 1.21, \quad (1.2)^2 = 1.44, \quad (1.3)^2 = 1.69,$$

$$(1.4)^2 = 1.96, \quad (1.5)^2 = 2.25$$

Entonces $\sqrt{2}$ está entre 1.4 y 1.5. Si este procedimiento continúa, obtenemos

$$(1.41)^2 = 1.9881, \quad (1.42)^2 = 2.0664.$$

Así $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$

$$(1.411)^2 = 1.990921, \quad (1.412)^2 = 1.993744, \quad (1.413)^2 = 1.996569,$$

$$(1.414)^2 = 1.999396, \quad (1.415)^2 = 2.002225.$$

Por ende, $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$

$$(1.4141)^2 = 1.99967881, \quad (1.4142)^2 = 1.99996064,$$

$$(1.4143)^2 = 2.00024549.$$

y entonces $1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$

$$(1.41421)^2 = 1.99999899241, \quad (1.41422)^2 = 2.0000181084.$$

Por consiguiente $1.41421 < \sqrt{2} < 1.41422$ y con ello:

$$\sqrt{2} - 1.41421 < 1.41422 - 1.41421 = 0.000011 = \frac{1}{10^5}$$

Se dice entonces que 1.41421 es una aproximación a $\sqrt{2}$ con un "error" menor que $\frac{1}{10^5}$. Continuando este proceso prodríamos aproximar $\sqrt{2}$ por medio de una fracción decimal con un error tan pequeño como queramos.

El engorroso procedimiento es sin embargo tan claro que podemos aplicárselo a cualquier número real positivo.

Sea x un real cualquiera mayor que cero. Entonces buscamos dos enteros consecutivos entre los que este x:

Sea $m = [x]$. ¡No hay otra!, porque entonces:

$$m \leq x < m + 1 \qquad (a_0)$$

y por lo tanto

$$0 \leq x - m < 1 \qquad (b_0)$$

Sea ahora q_1 el entero tal que

$$m + \frac{q_1}{10} \leq x < m + \frac{q_1}{10} + \frac{1}{10} \qquad (a_1)$$

Como $m + \frac{q_1}{10} \leq x < m + \frac{q_1}{10} + \frac{1}{10} \Leftrightarrow q_1 \leq 10(x-m) < q_1, \quad q_1$ es

$$q_1 = [10(x-m)] \qquad (b_1)$$

Con lo que se observa que, en vista de (b_0):

$$0 \leq q_1 < 10 \qquad (c_1)$$

y en vista de (a_1), que:

$$0 \leq x - \left(m - \frac{q_1}{10}\right) < \frac{1}{10} \qquad (d_1)$$

Sea ahora q_2 el entero tal que

$$m + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10} \leq x < m + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{1}{100} \qquad (a_2)$$

lo cual equivale a decir que:

$$q_2 = \left[100\left(x - \left(m + \frac{q_1}{10}\right)\right)\right] \qquad (b_2)$$

por (d_1) se tiene que

$$0 \leq q_2 < 10 \qquad (c_2)$$

y por (a_2), que

$$0 \leq x - \left(m + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100}\right) < \frac{1}{100} \qquad (d_2)$$

Procediendo inductivamente, dado $k \in \mathbb{N}$, si se suponen definidos $q_1, \ldots, q_{k-1}$ tales que $\forall\, j \in \{1, \ldots, k-1\}$, q_j satisface las correspondientes propiedades (a_j), (b_j), (c_j), (d_j), definimos q_k. Como el entero tal que:

$$m + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \cdots + \frac{q_k}{10^k} \leq x < m + \frac{q_1}{10} + \cdots + \frac{q_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} \qquad (a_k)$$

Lo cual equivale a:

$$q_k = \left[10^k \left(x - \left(m + \frac{q_1}{10} + \cdots + \frac{q_{k-1}}{10^{k-1}}\right)\right)\right] \qquad (b_k)$$

Con lo que se observa que

$$0 \leq q_k < 10 \qquad (c_k)$$

y que:

$$0 \leq x - \left(m + \frac{q_1}{10} + \cdots + \frac{q_k}{10^k}\right) < \frac{1}{10^k} \qquad (d_k)$$

Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, el racional $m + \frac{q_1}{10} + \cdots + \frac{q_k}{10_k}$ se aproxima a x con un error menor que $\frac{1}{10^k}$. (Si x no es entero, dicho racional es la fracción decimal $m \cdot q_1 \cdot q_k$). Si x es entero, $x = m$ y $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $q_k = 0$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, llamémosle R_k a $m + \frac{q_1}{10} + \cdots + \frac{q_k}{10^k}$. Es fácil ver que x es una fracción decimal si y sólo si para alguna $k \in \mathbb{N}$, $x = R_k$ y en este caso $q_{k+1} = q_{k+2} = \ldots = 0$.

Si $A = \{R_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ entonces A es no vacío y está acotado superiormente por x, así que A tiene supremo. Pero como $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $0 \leq x - R_k < \frac{1}{10^k}$, es sencillo comprobar que x es precisamente el supremo de A.

Por todas estas observaciones suele decirse que la *expansión decimal* de x es $m \cdot q_1\, q_2\, q_3 \cdots$. y que si x no es una fracción decimal o no es un entero, entonces tal expansión resulta ser una *expansión decimal "infinita"*.

Si x es negativo, la expansión decimal de x es de la forma $-(m\,.\,q_1\, q_2 \cdots)$, donde $(m\,.\,q_1\, q_2 \cdots)$ es la expansión decimal $-x$.

Es interesante observar que en el caso de los números racionales, el algoritmo de la división puede usarse para hallar las expansiones decimales.

Sea $x = \frac{a}{b}$ con a y b en los naturales. Supongamos que x no es entero

(si x es entero, el Teorema 3.7.4 nos dice como hacer la representación decimal de x). En este caso podemos suponer que $b > 1$. En la página 171 observamos que $\left[\frac{a}{b}\right]$ es precisamente el cociente que resulta de dividir a entre b. Así que si $m = [x]$, entonces:

$$a = m\,b + r_0, \qquad \text{donde } 0 \leq r_0 < b \tag{a'_0}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{m\,b + r_0}{b} = m + \frac{r_0}{b} \qquad \left(\text{en donde } 0 \leq \frac{r_0}{b} < 1\right) \tag{b'_0}$$

Ahora bien se definió q_1 (el primer dígito de la expansión decimal de x) como $q_1 = [10(x - m)]$.
En este caso $10(x - m) = 10\left(\frac{a}{b} - m\right) = 10\left(\frac{a-mb}{b}\right) = 10\frac{r_0}{b}$, así que q_1 no es otra cosa que el cociente que resulta de dividir $10r_0$ entre b.

$$10r_0 = b\,q_1 + r_1, \qquad \text{donde } 0 \leq r_1 < b \tag{a'_1}$$

Esto implica que

$$\frac{r_0}{b} = \frac{10r_0}{10b} = \frac{b\,q_1 + r_1}{10b} = \frac{q_1}{10} + \frac{r_1}{10b}$$

que sustituido en (b'_0), da lugar a:

$$\frac{a}{b} = m + \frac{q_1}{10} + \frac{r_1}{10b} \tag{b'_1}$$

Entonces

$$100\left(x - \left(m + \frac{q_1}{10}\right)\right) = 100\left(\frac{a}{b} - m - \frac{q_1}{10}\right) = 100\frac{r_1}{10b} = \frac{10r_1}{b}.$$

Por eso, como $q_2 = \left[100\left(x - \left(m + \frac{q_1}{10}\right)\right)\right]$ entonces q_2 es el cociente que se obtiene al dividir $10r_1$ entre b:

$$10r_1 = b\,q_2 + r_1, \qquad 0 \leq r_2 < b \tag{a'_2}$$

y esto implica que:

$$\frac{r_1}{10b} = \frac{10r_1}{100b} = \frac{b\,q_2 + r_2}{100b} = \frac{q_2}{100} + \frac{r_2}{100b}$$

que, sustituido en (a'_1), da lugar a:

$$x = \frac{a}{b} = m + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{r_2}{100b} \qquad (a_0)$$

A su vez esto da lugar a que $1000\left(x - \left(m + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100}\right)\right) = \frac{10r_2}{b}$, y por lo tanto $q_3 = \left[\frac{10r_2}{b}\right]$ resulta ser el cociente que resulta de dividir $10r_2$ entre b

$$10r_2 = b\,q_3 + r_3, \qquad 0 \leq r_3 < b \qquad (a'_3)$$

y así sucesivamente. En general se tiene que para cada $k \in \mathbb{N}$, q_k es el cociente que resulta de dividir $10r_{k-1}$ entre b:

$$10r_{k-1} = b\,q_k + r_k, \qquad 0 \leq r_k < b \qquad (a'_k)$$

y que

$$\begin{aligned} x = \frac{a}{b} &= m + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{q_k}{10^k} + \frac{r_k}{10^k b} \\ &= (m\,.\,q_1\,q_2 \cdots q_k) + \frac{r_k}{10^k b} \end{aligned} \qquad (3.36)$$

Si para alguna $k \in \mathbb{N}$, $r_k = 0$ entonces todos los cocientes q_{k+1}, q_{k+2}, q_{k+3}, ...son cero y la igualdad (b'_k) sería

$$x = \frac{a}{b} = m + \frac{q_1}{10} + \cdots + \frac{q_k}{10^k},$$

mostrando con ello que x sería una fracción decimal.

Pero x no es una fracción decimal entonces ningún residuo r_0, r_1, ... , es cero. Ahora bien, como todos los residuos son enteros positivos y menores que b pueden haber a lo más $b-1$ residuos diferentes: 1, 2, 3,..., $b-1$. Entonces en la lista de números r_0, r_1, ..., r_b hay por lo menos 2 que son igual, digamos r_i y r_j con $i < j$. $j = i + k$ para algún natural k y las igualdades (a'_1), (a'_2), ..., quedan:

$$10r_0 = b\,q_1 + r_1 \qquad (a'_1)$$

$$10r_1 = b\,q_2 + r_2 \qquad (a'_2)$$

$$(*)\begin{cases} 10r_i &= b\,q_{i+1} + r_{i+1} & (a'_{i+1}) \\ 10r_{i+1} &= b\,q_{i+2} + r_{i+2} & (a'_{i+2}) \\ \quad\vdots & & \vdots \\ 10r_{i+k-1} &= b\,q_{i+k} + r_{i+k} = b\,q_{i+k} + r_i & (a'_j) \end{cases}$$

$$(*)\begin{cases} 10r_i &= b\,q_{i+1} + r_{i+1} & (a'_{j+1}) \\ \quad\vdots & & \vdots \\ 10r_{i+k-1} &= b\,q_{i+k} + r_i & (a'_{j+k}) \end{cases}$$

$$(*)\begin{cases} 10r_i &= b\,q_{i+1} + r_{i+1} & (a'_{j+k+1}) \\ \quad\vdots & & \vdots \end{cases}$$

Como se ve, dado que $r_j = r_i$, la igualdad (a'_{j+1}) coincide con la igualdad (a'_{i+1}), la (a'_{j+2}) coincide con la (a'_{i+2}) y así hasta llegar a la igualdad (a'_{j+k}) que, al coincidir con la (a'_{i+k}), coincide con la igualdad (a'_i), obteniéndose de nuevo el residuo r_i y repitiéndose el conjunto de igualdades $(*)$ a partir de la igualdad (a_{j+k+1}). De este modo es claro que los cocientes que se obtienen en las igualdades del bloque $(*)$ también se van repitiendo y repitiendo en el mismo orden. Así pues, la representación decimal de x es la fracción "periodica":

$$m\,.\,q_1\,q_2\,\ldots\,q_i\,\underbrace{q_{i+1}\ldots q_{i+k}}\,\underbrace{q_{i+1}\ldots q_{i+k}}\,\underbrace{q_{i+1}\ldots q_{i+k}}\,\underbrace{q_{i+1}\ldots}\ldots$$

La notación que suele usarse para indicar el periodo o conjunto de dígitos que se repiten es la siguiente

$$m\,.\,q_1 q_2\ldots q_i\,\overline{q_{i+1}\ldots q_{i+k}}$$

En resumen todo racional es o bien un entero, o bien una fracción decimal, o bien su expansión decimal es infinita pero periódica y para hallar dicha expansión podemos dividir:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.571428 \\ \hline
7 & 4. \\
 & 4\,0 \\
 & \quad 50 \\
 & \quad\quad 10 \\
 & \quad\quad\quad 30 \\
 & \quad\quad\quad\quad 20 \\
 & \quad\quad\quad\quad\quad 60 \\
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad 4
\end{array}
$$

Como el residuo r_6 es 4 y coincide con el primer residuo r_0, entonces a partir del dígito q_7, se vuelve a repetir el periódo 571428. Entonces

$$\frac{4}{7} = 0.\overline{571428}\,.$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.233\ldots \\ \hline
30 & 7.0 \\
 & 1\,00 \\
 & \quad 100 \\
 & \quad\quad 10 \\
 & \quad\quad\quad \ddots
\end{array}
$$

Así que

$$\frac{7}{30} = 0.2\overline{3}$$

Ejercicios 7.

1. Halle en cada inciso el cociente y el residuo que resultan de dividir a entre b

   (a) $a = 3111$, $b = 212$;
   (b) $a = 6411037$, $b = -2164$;
   (c) $a = -6411037$, $b = 2164$;
   (d) $a = -36$, $b = 121$;
   (e) $a = -36$, $b = -121$;
   (f) $a = 3^{10}$, $b = 2^{10}$;

2. En los siguientes casos encuentre m.c.d. (a, b):

   (a) $a = -121$, $b = 33$;
   (b) $a = 543$, $b = -241$;
   (c) $a = 78696$, $b = 19332$

3. Demuestre la siguiente regla: "Para hallar el m.c.d. de más de dos números, se halla primero es de dos de ellos; después el de otro de los números dados y el primer m.c.d. hallado; después el de otro número y el segundo m.c.d. , y así sucesivamente hasta el último número. El último m.c.d. es el m.c.d. de todos los números dados'.

   Use dicha regla para hallar el m.c.d. de:

   (a) 2168, 7336 y 9184;
   (b) 770, 990, 1265 y 3388;
   (c) 144, 90, -1512;
   (d) 1932, 476, -952, 504 y -9261

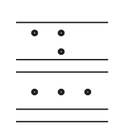
4. Escriba los siguientes números, escritos en base 10, en base 5 y en base 8:

   $$2, \qquad 21, \qquad 3116, \qquad 711096, \qquad 10^{10}$$

5. Escriba los siguientes números, presentados en base 10, en base 12 y "en maya":

   $$4, \qquad 16, \qquad 3102, \qquad 999111$$

6. Encuentre la representación decimal de los siguientes números:

   $(21031)_4$, $(7A08B1)_{12}$, $(1010101010)_2$, $(185111034)_9$, 

   $(30143014)_5$, $(3(16)(12)(11)(18)(15)(16)(12)5(11)2(13)(10)14)_{20}$

7. Convierta los siguientes números en la base 2 a la base 8:

   $$1110111, \quad 1010010000100001, \quad 111111111111111,$$

   $$101101101101101101101101$$

8. Sin convertir a la base 10, efectúe las operaciones:

(a) $(1214)_6 + (51015)_6$;
(b) $(111010111)_2 + (10101100)_2$;
(c) $(1A1B21)_{12} + (ABAB11A)_{12}$;
(d) $(140314)_5 + (2134114)_5$
(e) $(12145)_6 \cdot (51015)_6$;
(f) $(111010111)_2 \cdot (10101100)_2$;
(g) $(1A1B21)_{12} \cdot (ABAB11A)_{12}$;
(h) $(140314)_5 \cdot (2134114)_5$;

9. En el pizarrón se ha conservado la suma:

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 3 & _ & 5 & _ \\ + & 1 & _ & 6 & 4 & 2 \\ \hline & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{array}$$

¿En que sistema de numeración están escritos los sumandos y la suma?

10. Demuestre los siguientes "criterios de divisibilidad":

a) $(r_n, \ldots, r_0)_{10}$ es divisible entre 2 si r_0 es par o es cero.
b) $(r_n, \ldots, r_0)_{10}$ es divisible entre 4 si $(r_1\, r_0)_{10}$ lo es.
c) $(r_n, \ldots, r_0)_{10}$ es divisible entre 8 si $(r_2\, r_1\, r_0)_{10}$ lo es.
d) $(r_n, \ldots, r_0)_{10}$ es divisible entre 5 si r_0 es 0 o r_0 es 5.
e) $(r_n, \ldots, r_0)_{10}$ es divisible entre 9 si $(r_0 + r_1 + \cdots + r_n)_{10}$ es divisible entre 9.
f) $(r_n, \ldots, r_0)_{12}$ es divisible entre 8 si $(r_1\, r_0)_{12}$ lo es.
g) $(r_n, \ldots, r_0)_{12}$ es divisible entre 9 si $(r_1\, r_0)_{12}$ lo es.

11. *a*) Demuestre que para todo natural $a > 1$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $a^n - 1$ es divisible entre $a - 1$.
b) Use (a) para probar que $(r_n \ldots r_0)_a$ es divisible entre $a - 1$ si $(r_0 + r_1 + \cdots + r_n)_{10}$ es divisible entre $a - 1$.

12. Indique cuál o cuáles de los siguientes números son fracciones decimales y dé su representación decimal:

$$\frac{1}{8}, \qquad \frac{5}{24}, \qquad -\frac{6}{125}, \qquad \frac{25}{128}.$$

13. Halle una fracción decimal que se aproxime a $\sqrt{5}$ con un error menor que $\frac{1}{10^4}$.

14. Halle las expansiones decimales de los siguientes números, indicando el periódo en cada una de ellas:

$$\frac{2}{7}, \qquad \frac{201}{999}, \qquad \frac{18}{17}.$$

15. Demuestre que si $r = b_k b_{k-1} \dots b_1 b_0 \, . \, c_1 c_2 \dots c_n \overline{c_{n+1} \dots c_{n+j}}$ entonces

$$r = \frac{(b_k \dots b_1 b_0 c_1 \dots c_n c_{n+1} \dots c_{n+j}) - (b_k \dots b_0 c_1 \dots c_n)}{10^{n+j} - 10^n}.$$

Escriba en la forma $\frac{a}{b}$ los números: 33.3, 121.427, 21.01, 4.0010012, $0.\overline{00111}$.

16. ¿Por qué es irracional el número $0.1010010001000010000010\dots$?

3.8. Apéndice 1

Algunos teoremas que presentamos en este capítulo pueden demostrarse también usando el razonamiento de De Morgan que mencionamos en el Apéndice 1 del Capítulo 1. A modo de ilustración, aquí daremos nuevas demostraciones de los Teoremas 3.2.8, 3.3.4, 3.3.5, 3.3.10, 3.3.12. Deseamos que el lector compare con las ofrecidas dentro del capítulo , las cuales, aunque más largas, son quizá las que primero vienen a la mente cuando uno se inicia en estos temas.

Teorema 3.8.1 (3.2.8 y 3.3.4) *Si* $a, b \in \mathbb{R}^+$, *entonces*

(1) $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

(2) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

Demostración: Sea $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces

$a = b \Rightarrow aa = ab \wedge ab = bb \Rightarrow a^2 = b^2$

$a < b \Rightarrow (a < b \wedge a > 0) \wedge (a < b \wedge b > 0) \Rightarrow$

$aa < ab \wedge ab < bb$ (por axioma O3) $\Rightarrow a^2 < ab \wedge ab < b^2 \Rightarrow a^2 < b^2$

Entonces las premisas del siguiente razonamiento válido (el de De Morgan) son verdaderas, lo que nos lleva a la veracidad de la conclusión

$$\begin{array}{l} a = b \sqcup a < b \sqcup a > b \\ a^2 = b^2 \sqcup a^2 < b^2 \sqcup a^2 > b^2 \\ a = b \Rightarrow a^2 = b^2 \\ a < b \Rightarrow a^2 < b^2 \\ a > b \Rightarrow a^2 > b^2 \\ \hline (a^2 = b^2 \Rightarrow a = b) \wedge (a^2 < b^2 \Rightarrow a < b) \wedge (a^2 > b^2 \Rightarrow a > b) \end{array} \quad \blacksquare$$

Teorema 3.8.2 (3.3.5) *Si* $b > 0$ *y* $a \in \mathbb{R}$, *entonces*

(1) $a = \sqrt{b} \vee a = -\sqrt{b} \Leftrightarrow a^2 = b$

(2) $-\sqrt{b} < a < \sqrt{b} \Leftrightarrow a^2 < b$

(3) $a > \sqrt{b} \vee a < -\sqrt{b} \Leftrightarrow a^2 > b$

Demostración: Sean $b > 0$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces

$a = \sqrt{b} \Rightarrow a^2 = b$ (por la definición de $\sqrt{b}$.

$a = -\sqrt{b} \Rightarrow a^2 = (-\sqrt{b})^2 = b$.

$-\sqrt{b} < a < \sqrt{b} \Rightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b} \wedge a \geqslant 0) \vee$

$(-\sqrt{b} < a < \sqrt{b} \wedge a < 0) \Rightarrow (0 \leqslant a < \sqrt{b}) \vee (0 < -a < \sqrt{b})$

$\Rightarrow a^2 < b \vee (-a)^2 < b \Rightarrow a^2 < b$

$a > \sqrt{b} \vee a < -\sqrt{b} \Rightarrow a > \sqrt{b} > 0 \vee -a > \sqrt{b} > 0 \Rightarrow a^2 > b$.

Entonces las premisas del siguiente razonamiento válido son verdaderas y, por consiguiente, la conclusión también es verdadera

$$
\begin{array}{l}
(a = \sqrt{b} \vee a = -\sqrt{b}) \sqcup (-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}) \sqcup (a > \sqrt{b} \vee a < -\sqrt{b}) \\
a^2 = b \sqcup a^2 < b \sqcup a^2 > b \\
(a = \sqrt{b} \vee a = -\sqrt{b}) \Rightarrow a^2 = b \\
(-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}) \Rightarrow a^2 < b \\
(a > \sqrt{b} \vee a < -\sqrt{b}) \Rightarrow a^2 > b \\
\hline
(a^2 = b \Rightarrow (a = \sqrt{b} \vee a = -\sqrt{b})) \wedge (a^2 < b \Rightarrow \\
(-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}) \wedge (a^2 > b \Rightarrow (a > \sqrt{b} \vee a < -\sqrt{b})))
\end{array}
$$

■

Teorema 3.8.3 (3.3.10 y 3.3.12) *Si $c \geqslant 0$, entonces*

(1) $a = c \vee a = -c \Leftrightarrow |a| = c$

(2) $-c < a < c \Leftrightarrow |a| < c$

(3) $a > c \vee a < -c \Leftrightarrow |a| > c$

Demostración: Sean $c > 0$, entonces

$a = c \vee a = -c \Rightarrow |a| = |c| = c \Rightarrow |a| = c$.

Si $c = 0$, la proposición $-c < a < c$ es falsa, pero también lo es la proposición $|a| < c$, por lo que la implicación $-c < a < c \Leftrightarrow |a| < c$ es verdadera en este caso. Así que supondremos que $c > 0$ en las siguientes implicaciones

$-c < a < c \Rightarrow (-c < a < c \wedge a \geqslant 0) \vee (-c < a < c \wedge a < 0) \Rightarrow$

$(|a| = a < c) \vee (|a| = -a < c) \Rightarrow |a| < c$.

$a > c \vee a < -c \Rightarrow a > c \geqslant 0 \vee a < -c \leqslant 0 \Rightarrow (|a| = a > c) \vee (|a| - a > c) \Rightarrow |a| > c$.

Entonces las premisas del siguiente razonamiento válido son verdaderas y, por consiguiente, la conclusión también es verdadera

$$\begin{array}{l} (a = c \vee a = -c) \sqcup (-c < a < c) \sqcup (a > c \vee a < -c) \\ |a| = c \sqcup |a| < c \sqcup |a| > c \\ (a = c \vee a = -c) \Rightarrow |a| = c \\ (-c < a < c) \Rightarrow |a| < c \\ (a > c \vee a < -c) \Rightarrow |a| > c \\ \hline (|a| = c \Rightarrow (a = c \vee a = -c)) \wedge (|a| < c \Rightarrow (-c < a < c) \wedge \\ (|a| > c \Rightarrow (a > c \vee a < -c)) \end{array}$$

■

Capítulo 4

FUNCIONES

§1

4.1. Introducción

Una gran parte de las matemáticas y las ciencias naturales está dominada por relaciones entre magnitudes. En la naturaleza esto puede explicarse porque los distintos objetos y fenómenos que observamos suelen estar muy relacionados unos con otros. El hombre conoce desde hace tiempo las relaciones más sencillas de este tipo, y este conocimiento se halla expresado en las leyes físicas, las cuales indican que las diferentes magnitudes, aunque a veces aparentemente sean muy distintas, están tan íntimamente relacionadas que algunas de ellas quedan completamente determinadas o están en "función" de los valores de las demás. Una relación de este tipo se llama **relación funcional**.

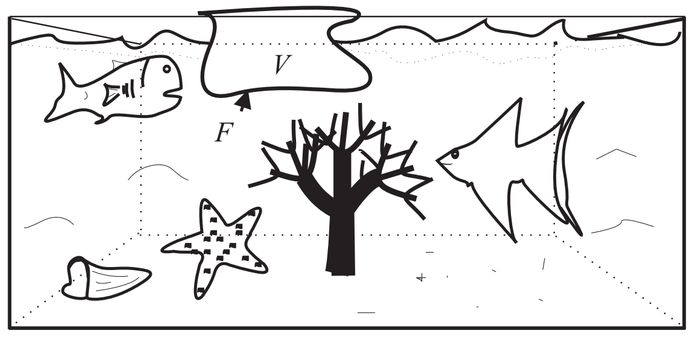
Ejemplos:

1. Principio de Arquímedes

"Un cuerpo sólido al ser sumergido en un líquido, sufre una disminución de peso igual al volumen del líquido desplazado". La disminución del peso se interpreta actualmente como una fuerza o empuje que el líquido ejerce sobre el líquido. Si llamamos F a esta

fuerza y P al peso del volumen del líquido desplazado, el principio de Arquímedes queda expresado por la fórmula

$$F = P. \tag{4.1}$$



Tenemos un sólido sumergido en un líquido y podemos efectuar diversas mediciones. Por una parte, mediante una balanza, podemos medir la diferencia entre el peso del objeto cuando se halla fuera del líquido y cuando se encuentra dentro de él. Por otra parte, podemos ver la diferencia en el nivel del líquido cuando el sólido está fuera y dentro de él. Con esto podemos saber el volumen del líquido desplazado y pesar un volumen igual de líquido. Obtenemos así dos magnitudes que quedarán expresadas en números y cada uno de ellos los obtenemos por métodos diferentes. El principio de Arquímedes nos dice que estos dos números, que no tenían por qué guardar alguna relación, sí están relacionados: ¡los dos son iguales!.

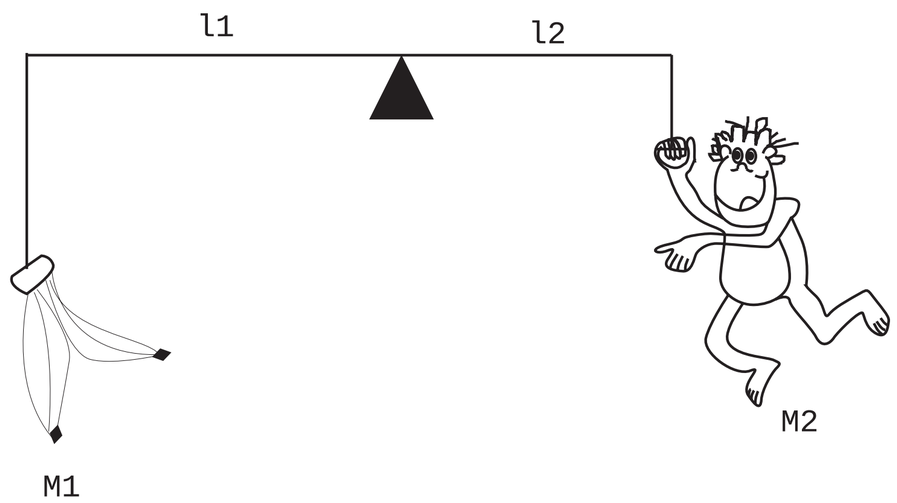
2. Ley de las Palancas

"En una palanca en equilibrio:

los pesos colocados M_1 y M_2 son inversamente proporcionales a las longitudes de los brazos de la palanca l_1 y l_2:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{l_2}{l_1}. \qquad "$$

Aquí, nuevamente dos números que se pueden obtener por métodos muy distintos, $\frac{M_1}{M_2}$ y $\frac{l_2}{l_1}$, resultan ser iguales.



Si fijamos l_1 y M_1 y tomamos para cada peso M la distancia l a la cual debe colgarse para que la palanca esté en equilibrio, la relación entre l y M queda expresada así:

$$l = \frac{l_1 M_1}{M} = \frac{k}{M} \tag{4.2}$$

siendo $k = l_1 M_1$ una constante. En (4.2) se ve claramente cómo l es función de M. Arquímedes, quien también descubrió esta ley, no llegó a expresarla en esta forma y esto puede deberse a que los griegos no trabajaban con números reales, sino sólo con magnitudes. Ellos sabían qué significaba multiplicar dos distancias: una área. Pero ¿qué significaba multiplicar dos magnitudes tan distintas como un peso y una longitud?

3. Ley de Hooke

"El alargamiento de un resorte es proporcional al peso que se le cuelga".

Si representamos con a el alargamiento de un resorte y por M el peso que se le cuelga, la ley de Hooke señala que existe un número k que no depende del peso (sólo depende del resorte) tal que para valor de M, hay un único valor de a determinado por la fórmula:

$$a = kM \tag{4.3}$$

es decir, a es función de M.

4. Ley de la Gravitación Universal (Newton).

   "Dados dos cuerpos de masas M y M' situados a una distancia r entre ellos, se atraen con una fuerza

$$F = G\frac{MM'}{r^2} \tag{4.4}$$

   donde G es una constante que no depende de M, de M' ni de r".

   La fórmula (4.4) expresa cómo F está en función de M, M' y r: a cada terna de valores, uno para M, otro para M' y otro para r, le asigna un único valor para F.

5. Ley de Caida Libre de los Cuerpos (Galileo).

   "Supongamos que en un cierto instante un cuerpo que estaba en reposo comienza a caer por la acción de la gravedad. La distancia s recorrida por el cuerpo en el tiempo t está expresada por la fórmula

$$S = \frac{gt^2}{2} \tag{4.5}$$

   donde g es la aceleración de la gravedad y es una constante que no depende del tiempo".

   La fórmula (4.5) permite calcular el valor de S para cualquier valor dado de t, es decir, S está determinado por t. También nos asegura que S no depende de la masa del cuerpo (como creían los griegos).

Podemos también considerar el alargamiento de una varilla metálica como función de su temperatura, la presión de un gas como función de su densidad y de la temperatura, etc.

En general, siempre que los valores de ciertas cantidades a, b, c, ..., están determinadas completamente por los valores de otras cantidades x, y, z, ... A las variables a, b, c, ... suele llamárseles **variables dependientes** y a los valores x, y, z, ..., **variables independientes**.

En nuestros ejemplos (1)–(5), la dependencia de las variables dependientes con respecto a las variables independientes, está expresada

mediante fórmulas algebraicas que nos dicen cómo calcular el valor de la variable dependiente que corresponde a valores dados de las variables independientes.

En (1) F y P pueden ser consideradas ambas como variables independientes. Cada valor de P determina un único valor de F y cada valor de F determina un único valor de P. Por esto mismo cada una de ellas puede ser considerada como variable dependiente ya que cada una es función de la otra.

En la fórmula (2) l está expresada en función de M. M es la variable independiente y l es la variable dependiente, aunque también podemos considerar a l como variable independiente y a M como variable dependiente, porque M depende también de l: por valor de l (distinto de cero) M tiene un único valor determinado por la fórmula

$$M = \frac{k}{l}.$$

La fórmula (5) expresa S en función de t, es decir, t, es la variable independiente y S es la variable dependiente. ¿Se puede considerar a S como la variable independiente y a t como la variable dependiente?, es decir, ¿Podemos expresar a t en función de s?. La respuesta a esta pregunta es *No*, si no restringimos los valores que puede tomar t, ya que para cada valor de S hay dos (y no uno) valores de t que satisfacen la ecuación (5), a saber

$$t = \sqrt{\frac{2S}{g}} \qquad t = -\sqrt{\frac{2S}{g}}.$$

Sin embargo, la fórmula (4.5) es una ley física en la que la variable t representa el tiempo transcurrido desde que un objeto comienza a caer por la acción de la gravedad y esta interpretación física limita los valores que puede tomar t a $t \geq 0$. Con esta restricción, t está completamente determinada por S mediante la fórmula

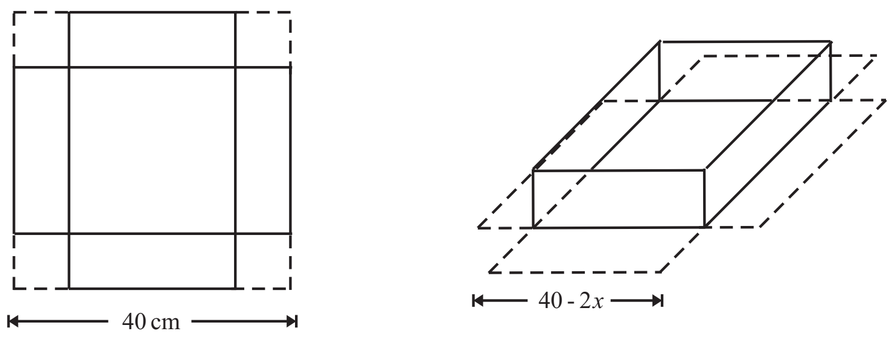
$$t = \sqrt{\frac{2S}{g}}$$

y así S es la variable independiente y t es la variable dependiente.

Por medio del cálculo (diferencial e integral) se resuelven algunos problemas típicos en los que es esencial percibir las variables comprendidas en las situaciones particulares y conocer la relación matemática que existe entre esas variables y es pertinente señalar que a veces no es sencillo obtener una fórmula que las relacione.

Ejemplos:

1. A partir de un cartón cuadrado de 40 cm de lado hagamos una caja rectangular sin tapa, de altura x. Esto lo hacemos recortando cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas del cuadrado y doblando las cejas con el fin de formar los lados de la caja.



Las dimensiones de la caja serán: longitud: $(40-2x)$cm, ancho: $(40-2x)$cm, altura: $x$cm.

El volumen de la caja será el producto de estas tres dimensiones:

$$V = (40-2x)^2 x. \tag{4.6}$$

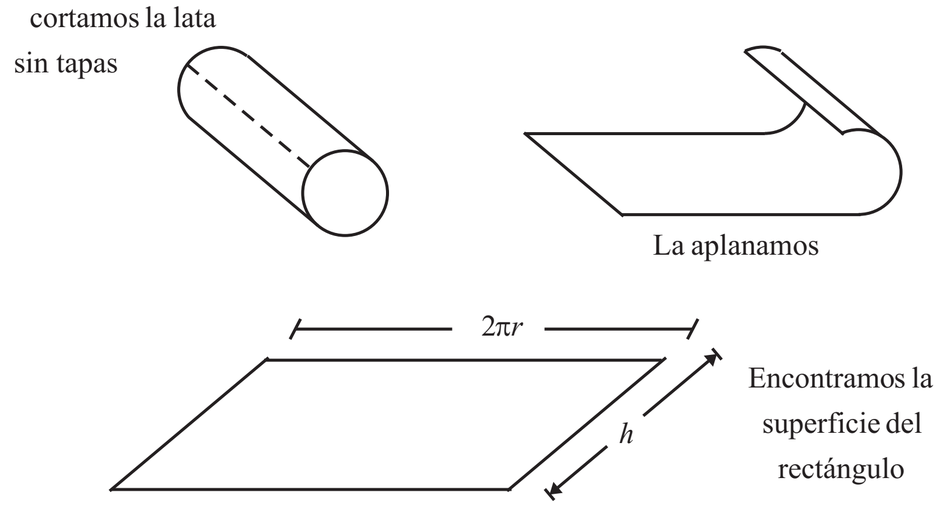
Esta fórmula expresa V como función de x y es muy útil para encontrar cuáles deben ser las dimensiones de la caja (cuál debe ser x) para que su volumen sea máximo. El problema se resuelve con métodos de cálculos y no lo haremos aquí.

Otro problema que se resuelve en cálculo es el siguiente.

2. Tenemos que proyectar una lata de aceite en la forma de un cilindro recto y se nos dice que debe contener un litro de aceite.

¿Cuáles deben ser las dimensiones de la lata para que su manufactura requiera de la mínima cantidad de metal?.

Queremos que la superficie de la lata tenga área mínima. No es difícil encontrar una fórmula para el área de dicha superficie en términos del radio r de la lata y de su altura h. La tapa y el fondo de la lata son discos de radio r. Consecuentemente el área de la tapa es πr^2 y también es esa el área del fondo. Para hallar el área lateral de la lata imaginemos que la cortamos sin tapa ni fondo desde arriba hasta abajo y después la aplanamos para formar un rectángulo, como se muestra en las figuras siguientes.



La altura del rectángulo es la misma que la altura h de la lata, mientras que el ancho del rectángulo es igual a la circunferencia de la lata que es $2\pi r$. El área de este rectángulo es $2\pi rh$ y es el área lateral de la lata. Si A es el área total de la lata, tenemos entonces que

$$A = \underbrace{\pi\, r^2}_{\text{area de la tapa}} + \underbrace{\pi\, r^2}_{\text{area del fondo}} + \underbrace{2\pi\, r\, h}_{\text{area lateral}} ,$$

es decir,

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh. \tag{4.7}$$

Hemos logrado expresar A en función de r y de h. El resto del problema suele resolverse con técnicas de cálculo usando la fórmula 4.7. Aqí sólo diremos que la solución del problema se puede simplificar si encontramos una fórmula que exprese A en función de una sola

variable y no de dos como en 4.7. Para hallar una fórmula así, usaremos los datos del problema: Nuestra lata debe contener un litro de aceite, es decir, 1000 cm^3 de aceite. Como el volumen de un cilindro recto de radio r y altura h está expresado por la fórmula

$$\text{Volumen} = \pi\, r^2\, h,$$

debemos escoger las dimensiones de r y h de tal forma que la siguiente ecuación se satisfaga:

$$1000 = \pi\, r^2\, h \qquad (r \text{ y } h \text{ medidas en cm}).$$

Nótese que para cada valor de r distinto de 0, hay uno y sólo un valor de h dado por la fórmula

$$h = \frac{1000}{\pi\, r^2} \tag{4.8}$$

h es, por tanto, función de r. Combinando las fórmulas (4.7) y (4.8) podemos ver que el área del cilindro es función de su radio:

$$A = 2\pi\, r^2 + 2\pi r \left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = \frac{2\pi r^3 + 2000}{r}, \quad r \neq 0 \tag{4.9}$$

Ejercicios 1.

1. Cada una de las siguientes ecuaciones describe una relación entre dos variables. Decir en cada caso cuál es (o cuáles pueden) la variable (o variables) dependiente(s):

   $a)$ $u + 3v - 7 = 0$.

   $b)$ $(r-4)^2 + (x-1)^2 = 1$.

   $c)$ $th = 100$.

   $d)$ $4w^2 - 5r = 20$.

   $e)$ $uv^2 = 8$.

   $f)$ $|r| = s$.

   $g)$ $w = \frac{z-4}{z-2}$.

   $h)$ $p^2 = q^4$.

   $i)$ $a = kM$.

   $j)$ $y = x^2, \quad x \geq 0$.

2. Dada la fórmula $F = G\frac{MM'}{r^2}$ (G constante).

   a) ¿Cuáles pueden ser las variables dependientes?

   b) Si $r = 0$, ¿la fórmula asigna a F un valor?

   c) ¿Qué restricción se le debe imponer a r para que F sea función de r (y de M y M')?

   d) ¿Qué restricciones se les debe imponer a r y a F para que r sea función de M, M' y F?

3. ¿En cuáles de las siguientes relaciones se define y como función de x?

   a) $|x - y| = 0$. *c*) $y = -\sqrt{1 - x^2}$. *e*) $x^2 + y^2 = 1$.

   b) $|x - y| = 1$. *d*) $x = \sqrt{1 - y^2}$. *f*) $x^2 + y^2 = -1$.

4. Una bola de boliche de 8 cm de radio está cubierta con una capa de hielo; expresar el volumen de hielo como una función de su espesor (recordar que el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$).

5. Expresar el volumen de una esfera como función de su área. (Para una esfera, el área es $4\pi r^2$).

6. Expresar el perímetro de un triángulo equilatero como función de su altura.

7. Expresar el área de un tetraedro como función de su arista.

8. Un rectángulo se inscribe en un círculo de radio 10. Expresar el área del rectángulo como función de la longitud de su lado mayor.

§2

4.2. Formas de definir una función

Al principio de este capítulo dijimos que una relación o ley funcional es una regla mediante la cual se expresa que ciertas cantidades (variables dependientes) dependen de otras (variables independientes). A estas leyes o reglas de correspondencia que asignan valores únicos de las variables dependientes a valores dados de las variables independientes, se les llama **funciones**.

La dependencia de y con respecto a x por medio de una función (regla funcional) f, es indicada por la expresión "y es función de x" y suele escribirse $y = f(x)$. $f(x)$ es alguna expresión que nos explica cómo están relacionadas las variables x y y, es decir, nos explica cómo se le asocia a cada valor de x un único valor de y. Por eso también usaremos la notación $y = f(x)$ para indicar que y es el valor asociado a x por la función o regla de correspondencia f. Si, por ejemplo, escribimos $y = f(x) = x^2 + 1$, con ello queremos decir que y depende de x y que esta dependencia está expresada mediante la función o regla f que a cada valor de x le asocia el único valor de y dado por $f(x) = x^2 + 1$. Así, al valor $x = 0$, f le asocia el valor de $y = f(0) = 0 + 1 = 1$, si $x = 1$, y valdrá $f(1) = 1 + 1 = 2$ y si $x = \star$, y valdrá $f(\star) = \star^2 + 1$. Note que f no es variable, sino que es una regla que relaciona dos variables.

Si escribimos $y = y(x)$, sobreentenderemos que y depende de x mediante una función f que a cada x le asocia el valor $y(x)$, es decir $y(x) = f(x)$.

Si y es función de las variables x_1, x_2, ..., x_n mediante una función f, se escribirá $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ejemplos:

1. la fórmula (4.6), $V = (40-2x)^2x$, expresa el volumen de una caja en función de su altura x. Estas cantidades están relacionadas mediante la función o regla de correspondencia f que a cada valor

de x le asocia un único valor de V dado por la siguiente fórmula

$$V = f(x) = (40 - 2x)^2 x.$$

Esta fórmula es una expresión algebraica de la función f. Podemos escribir simplemente $V(x) = (40-2x)^2 x$ para indicar que V depende de x y que $V(x)$ es el volumen de la caja cuando su altura vale x, por ejemplo

$V(1) = f(1) = (40 - 2(1))^2(1) = 38^2 = 144 \text{ cm}^3.$
$V(10) = f(10) = (40 - 2(10))^2(10) = 4000 \text{ cm}^3.$
$V(20) = f(20) = (40 - 2(20))^2(20) = 0$
$V(5) = f(5) = (40 - 2(5))^2(5) = (30)^2(5) = 900 \times 5 = 4500 \text{ cm}^3.$

Si z y $\star$ representan números

a) Cuando $x = z$, $V(z) = (40 - 2z)^2 z$.

b) Cuando $x = \star$, $V(\star) = (40 - 2\star)^2 \star$.

2. La fórmula (4.9)

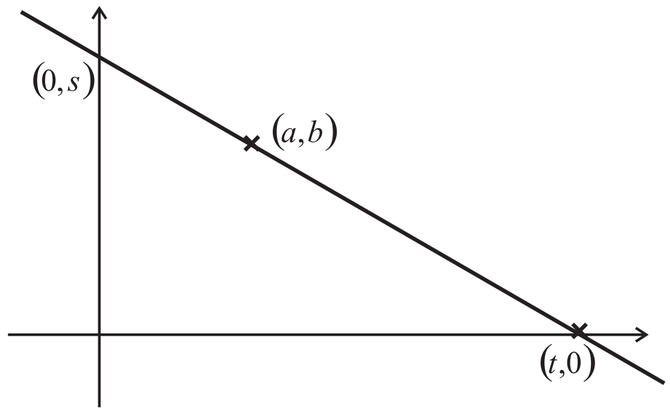
$$A = \frac{2\pi r^3 + 2000}{r}$$

indica que A es función de r. Si escibimos

$$A(r) = \frac{2\pi r^3 + 2000}{r}$$

queremos decir con ello que A es función de r y que las variables A y r están relacionadas mediante una función f que asocia a cada valor de r (distinto de cero) un único valor de A dado por la fórmula (4.9). La función f se puede expresar mediante la fórmula algebraica

$$f(r) = \frac{2\pi r^3 + 2000}{r}, \qquad r \neq 0.$$



Se tiene también

$$A(1) = \frac{2\pi+2000}{1} = 2\pi + 2000$$

$$A(2) = \frac{16\pi+2000}{2} = 8\pi + 1000$$

$$A(10) = 1000(\pi + 1)$$

$$A(\sqrt[3]{2}) = \frac{2\pi(\sqrt[3]{2})^3+2000}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4\pi+2000}{\sqrt[3]{2}}$$

$$A(\star) = \frac{2\pi\star^3+2000}{\star}.$$

3. En el plano cartesiano con ejes X y Y (conjunto de parejas (x, y), donde $x, y \in \mathbb{R}$) tomemos un punto (a, b), con $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Daremos a continuación una regla de correspondencia o función que asociará a cada número real x distinto de a un único número real s. Para definir dicha regla, tomaremos un número real cualquiera $t \neq a$ y diremos cómo le asociaremos un número s perfectamente determinado por t. Nuestra función sera la regla que a cada t le asocia s.

   Sea entonces t un número real distinto de a. El punto $(t, 0)$ es un punto del eje X en el plano. Sea l la recta que pasa (a, b) y $(t, 0)$. l intersecta al eje Y en un único punto $(0, s)$. Sea $s = f(t)$. Si hacemos variar t por todos los reales menos el real a, variará dependiendo de t mediante la función f expresada por medio de la construcción que hicimos

No es difícil convencerse de que esta función f puede también expresarse algebraicamente. Dado el punto $(t,\, 0)$, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(t,\, 0)$ y $(a,\, b)$ es

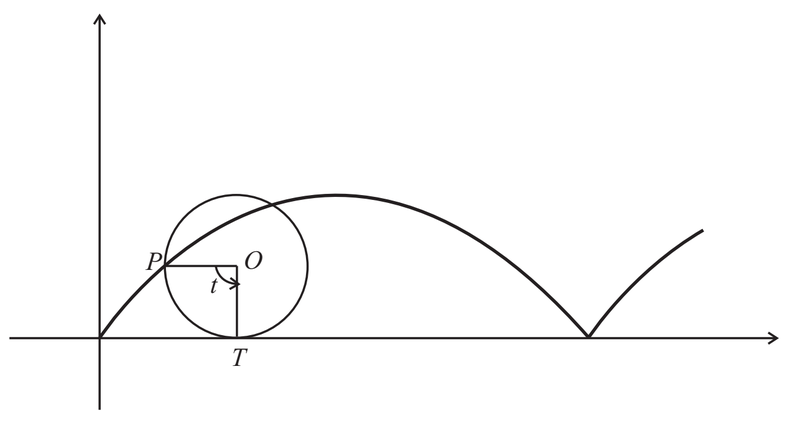
$$y = \frac{b}{a-t}(x-t).$$

Esta recta intersecta al eje Y cuando $x = 0$. Pero en este caso

$$y = \frac{-bt}{a-t},$$

así que $s = \frac{bt}{t-a}$. Por lo tanto $s = f(t) = \frac{bt}{t-a}$ es la expresión algebraica para f.

Vemos entonces que una función puede expresarse de maneras diferentes. De hecho, para definir una función no necesitamos dar siempre una fórmula algebraica. Por ejemplo, un dispositivo mecanico puede darnos una regla que a cada número real le asocie un punto del plano, es decir, una pareja $(x(t),\, y(t))$ de números que dependen de t. Así, si un punto P está sobre una circunferencia que rueda a lo largo del eje X, describe una curva llamada cicliode. Si t es el ángulo POT de la figura siguiente, la posición $P = (x(t),\, y(t))$ depende de t.



Esta regla, a diferencia de las funciones que hasta ahora hemos trabajado, no asocia a cada número otro número o a cada valor de la variable t un valor que sea un número real, sino que asigna a cada t un único punto en el plano que es la posición del punto P. Esta regla también será función para nosotros.

En nuestro ejemplo (4) de la página 209, F, la fuerza con que se atraen

dos cuerpos es función de las masas M, M' de ellos y de la distancia r que los separa. La función f que expresa esta relación, se escribe algebraicamente así

$$F = f(M,\, M',\, r) = G\frac{MM'}{r^2}, \qquad r \neq 0.$$

Independientemente de las interpretaciones físicas de M, M', r y F, y si denotamos por $\mathbb{R}^3$ al espacio ($\mathbb{R}^3 = \{(x,\, y,\, z) \mid x,\, y,\, z \in \mathbb{R}\}$) f es una regla que a cada punto de $\mathbb{R}^3 - \{(x,\, y,\, 0) \mid x,\, y \in \mathbb{R}\}$ le asocia un número real (el real $f(x,\, y,\, z) = G\frac{xy}{z^2}$). f será también una función.

Así mismo, podemos describir el movimiento de un cuerpo en el plano o en el espacio mediante funciones que nos hagan ver cómo depende la posición de un cuerpo del instante en que se encuentre. Por ejemplo:

A cada valor de t en los reales le podemos asignar un único punto P del plano dado por la regla

$$P = f(t) = (t,\, -t^2).$$

Si se interpreta a t como el tiempo, f describe la localización de P en el tiempo t.

En los ejemplos (3) de la página 217 y en el ejemplo del cicliode de la página 218, vimo que para definir una función no es necesario hacerlo mediante una fórmula algebraica. El concepto de función es más amplio que el de fórmula; además, como advertimos en el último ejemplo, incluiremos como funciones reglas que no necesariamente a cada número real otro número real.

Y ahora, antes de que otra cosa suceda, daremos la siguiente definición.

Definición 4.2.1 Una **función** es una regla que asocia a cada elemento de un cierto conjunto A un único elemento de un conjunto B. Al conjunto A suele llamársele **dominio de la función** y al conjunto B **codominio** (o **contradominio**) **de la función**.

Para indicar que f es una función con dominio A y codominio B, se escribe $f : A \to B$ o $A \xrightarrow{f} B$. A veces escribiremos $\operatorname{Dom} f$ o D_f para referirnos al dominio de una función f y $\operatorname{Cod} f$ para referirnos al codominio.

Ejemplos:

1. La función $id_A : A \to A$ tal que para cada $a \in A$, $id_A(a) = a$. Aquí A es un conjunto cualquiera. Esta función es llamada **función identidad en** A.

2. Si $C \subseteq A$, la función $j : C \to A$ tal que para cada $c \in C$, $j(c) = c$, se llama la **inclusión de** C **en** A.

3. Si A y B son conjuntos no vacíos y $b_0 \in B$, podemos definir una función $g : A \to B$ tal que para todo $a \in A$, $g(a) = b_0$. Tal función es llamada **función constante** b_0.

4. Si $f : A \to B$ es una función y $C \subseteq A$, entonces también es función $g : C \to B$ tal que $g(c) = f(c)$ para toda $c \in C$. Esta función se llama la **restricción** de f a C y se denota por $f|_C$.

Ahora, dada una función $f : A \to B$ la naturaleza de los conjuntos A y B está estrechamente relacionada con la regla de correspondencia f:

El dominio de una función debe ser un conjunto tal que si x es un elemento de él debemos poder asignarle a x, mediante la función, un elemento bien definido (y único) del codominio B.

Ejemplos:

1. Si f es la función dada por la fórmula

$$S = f(t) = \frac{bt}{t - a}$$

donde b y a son números reales y s y t toman valores reales, no sabemos mediante dicha fórmula que valor real de S le corresponde al valor $t = a$. De esta suerte, si el codominio es $\mathbb{R}$ (o un subconjunto de $\mathbb{R}$), el dominio no puede ser $\mathbb{R}$ pues a no esta en el dominio.

2. Las leyes de la naturaleza no siempre son ciertas para todos los valores de las magnitudes que en ellas aparecen. Por ejemplo, la ley de Hooke que expresa que el alargamiento de un resorte es proporcional al peso que se le cuelga ($a = kM$), sólo se cumple si el peso M es relativamente pequeño. Cuando ponemos un peso demasiado grande la ley ya no se cumple, si el peso es excesivo, incluso se rompe el resorte. Sólo podemos asegurar que la ley es válida en un cierto intervalo: cuando M varía entre 0 y 10 kg, por ejemplo. En este caso la que a cada M le asocia el alargamiento $a = kM$, no tiene sentido si $M < 0$ o si $M > 10$. Así que esta función tiene un dominio que está contenido en el intervalo

$$[0,\, 10] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 10\}.$$

3. Supongamos que la fórmula

$$A(r) = \frac{2\pi r^3 + 2000}{r}$$

expresa el área de la superficie de una lata en función de su radio r. Dicha área es un número real, así que el codominio de esta función es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y esto impone la restricción $r \neq 0$ ya que en $\mathbb{R}$ está penada la división entre cero. Además, como r representa la longitud de una lata real y no puede tomar valores negativos, el dominio de la función debe estar contenido en el conjunto $\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$.

Como se ve, restricciones algebraicas y físicas suelen limitar el dominio y el codominio de una función.

Aunque generalmente la descripción de una función incluye una definición de su dominio y de su codominio, en cálculo, en donde se trabaja casi siempre con números reales, suele no mencionarse explícitamente el dominio y el codominio de las funciones. Esto se debe a que el dominio puede ser bastante claro según el contexto o el problema que estamos resolviendo y el codominio casi siempre es $\mathbb{R}$.

Por ejemplo, el ejemplo (1) de la página 211,

$$V = (40 - 2x)^2 x$$

la obtuvimos al tratar de resolver el problema de construir una caja de volumen máximo a partir de un cuadrado de cartón de lado 40 cm. Esta fórmula es la expresión algebraica de una función f que asigna a cada altura x un volumen V. La regla

$$V(40-2x)^2x = f(x),$$

independientemente de la interpretación física de V, tiene sentido para cada número real x (es decir, si el codominio es $\mathbb{R}$, no hay restricciones algebraicas). Pero en nuestro problema, x representa una longitud y por lo tanto, no puede tener un valor negativo. También, como el cartón es de 40 cm de lado, es imposible recortarle cuadrados en las esquinas de mas de 20 cm de ancho. Estas limitaciones físicas implican que x debe tener un valor entre 0 y 20 cm.

Entonces, si no se mencionan explícitamente el dominio y el codominio de f, supondremos en este problema que el codominio es $\mathbb{R}$ y que el dominio es el intervalo:

$$[0,\,20] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 20\}.$$

En cálculo es usual hacer la siguiente convención, que algunos autores conocen con el nombre de **regla del máximo dominio**:

"El dominio de cualquier función que se nos presente como una fórmula algebraica para números reales fuera de cualquier contexto físico determinado, suponemos automáticamente que consta de todos los elementos posibles para los cuales tiene sentido la fórmula, a menos que sean mencionadas explícitamente restricciones adicionales".

Por ejemplo, ¿Cuál es el dominio de la función h dada por la fórmula

$$h(w) = \frac{1}{\sqrt{w - w^2 + 6}}?$$

En esta fórmula hay dos consideraciones de tipo algebraico que afectan los posibles valores de w. Primera, el dominador no puede ser igual a cero y, segunda, la cantidad bajo el signo del radical no puede ser

negativa. Estas condiciones se deben cumplir para poder calcular $h(w)$ a partir de w.

Combinadas, estas condiciones nos dicen que $w - w^2 + 6$ debe ser positiva

$$w - w^2 + 6 > 0$$

pero,

$$w - w^2 + 6 = (3 - w)(2 + w).$$

Por lo tanto, w debe ser escogido de tal suerte que

$$(3 - w)(2 + w) > 0,$$

lo cual se satisface si y sólo si

$$(3 - w) > 0 \quad \text{y} \quad (2 + w) > 0 \quad \text{o bién,} \quad (3 - w) < 0 \quad \text{y} \quad (2 + w) < 0.$$

En el primer caso las dos desigualdades pueden escribirse como

$$3 > w \quad \text{y} \quad w > -2, \quad \text{o como} \quad -2 < w < 3$$

y en el segundo caso, las dos desigualdades son equivalentes a estas otras

$$w > 3 \quad \text{y} \quad w < -2$$

que, juntas representan una contradicción.

Así, los únicos valores que puede tomar w en el presente ejemplo, son los descritos por las desigualdades

$$-2 < w < 3,$$

es decir, el intervalo $(-2, 3)$ es el dominio máximo de la función h.

Finalmente observemos que $\forall\, w \in (-2, 3)$ $h(w) > 0$ (¿por qué?) y la pregunta es ¿para todo $y > 0$ existe $w \in (-2, 3)$ tal que $y = h(w)$?. Veamos: para $y > 0$ y $w \in (-2, 3)$ se tiene que

$$\begin{aligned} y = h(w) &\Leftrightarrow y^2 = \tfrac{1}{w - w^2 + 6} \\ &\Leftrightarrow w - w^2 + 6 = \tfrac{1}{y^2} \\ &\Leftrightarrow w^2 - w - 6 + \tfrac{1}{y^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(w - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{25}{4} - \tfrac{1}{y^2} \quad \text{(completando cuadrados)} \end{aligned}$$

y esta última ecuación tiene solución para w si y sólo si

$$\frac{25}{4} - \frac{1}{y^2} \geq 0$$

lo cual es equivalente a $\frac{1}{y^2} \leq \frac{25}{4}$ y esto último es válido si y sólo si $y \leq -\frac{2}{5}$, y como tenemos la condición de que $y > 0$, entonces $\left(w - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{1}{y^2}$ tendrá solución si y sólo si $y \geq \frac{2}{3}$ y por lo tanto el conjunto

$$\{h(w) \mid w \in (-2,\, 3)\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y = h(w) \text{ para algún } w \in (-2,\, 3)\}$$

es igual a

$$\left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{2}{5}\right\} = \left[\frac{2}{5}, \infty\right).$$

A este conjunto se le conoce como la imagen de h. En general tenemos la siguiente definición.

Definición 4.2.2 Sea $f : A \to B$ una función. Al conjunto

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) :\ x \in A\}$$

se le llama la **imágen** de f.

Ejercicios 2.

1. Use la regla $f(L) = 7L + \frac{48}{L}$ para encontrar

$a)$ $f(4)$	$d)$ $f(\sqrt{2})$	$g)$ $f(x+h)$	$j)$ $f(4\pi)$
$b)$ $f(5)$	$e)$ $f(3+\sqrt{2})$	$h)$ $f(\pi^2)$	$k)$ $f(4t)$
$c)$ $f(x)$	$f)$ $f(3+h)$	$i)$ $f(x^2)$	$l)$ $f(8/7)$

2. Use la regla $g(s) = 600s - \frac{1}{2}s^2$ para calcular

$a)$ $g(100)$	$d)$ $g(2000)$	$g)$ $g(x+\pi)$	$j)$ $g\left(\frac{1}{\pi}\right)$
$b)$ $g(400)$	$e)$ $g(\pi)$	$h)$ $g(x+h)$	$k)$ $g\left(\frac{1}{4}\right)$
$c)$ $g(700)$	$f)$ $g(x)$	$i)$ $g(2+3k)$	$l)$ $g(\sqrt{2})$

3. La regla $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

¿es función?. Si lo es, encuentre $H(3)$, $H(-5)$, $H(0)$ y $H(|x|)$.

4. Sean:

B el conjunto de los seres humanos.
H el conjunto de los hombres.
F el conjunto de las mujeres.
P el conjunto de los hombres que tienen hijos.
M el conjunto de las mujeres que tienen hijos.

Diga cuáles de las siguientes reglas son funciones (en este problema se está denotando por $f : A \to C$ a alguna regla entre los elementos de A y los de C, aunque no sea función).

$a)$ $f_1 : B \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f_1(b) =$ edad en años de b.

$b)$ $f_2 : B \to B$ tal que $f_2(b) =$ madre de b.

$c)$ $f_3 : B \to M$ tal que $f_3(b) =$ madre de b.

$d)$ $f_4 : B \to B - M$ tal que $f_4(b) =$ madre de b.

$e)$ $f_5 : H \to B$ tal que $f_5(h) =$ hijo de h.

$f)$ $f_6 : B \to B$ tal que $f_6(b) =$ hijo de b.

$g)$ $f_7 : H \to B$ tal que $f_7(h) =$ hijo mayor de h.

$h)$ $f_8 : P \to B$ tal que $f_8(p) =$ hijo mayor de p.

$i)$ $f_9 : F \to \wp(B)$ tal que $f_9(m) =$ conjunto de hijos de m.

$j)$ $f_10 : P \to \wp(B)$ tal que $f_10(p) =$ conjunto de hijos de p.

$k)$ $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que a cada pareja de números reales le asocia su suma: $+(a, b) = a + b$.

l) $* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que a cada pareja de números reales le asocia su producto: $*(a,\, b) = ab$.

m) $- : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ tal que a cada pareja de números reales le asocia su resta: $-(a,\, b) = a - b$ (recordar $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$).

n) $d : \{(a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \neq 0\} \to \mathbb{R}$ tal que $d((a,\, b)) = \frac{a}{b}$.

ñ) Si A es el conjunto de proposiciones lógicas, la regla

$$L : A \to \{V,\, F\}$$

dada por

$$L(p) = \begin{cases} V & \text{si } p \text{ es verdadera} \\ F & \text{si } p \text{ es falsa} \end{cases}$$

o) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que a cada x le asocia un número ???? cuadrado es x.

5. Determinar el dominio máximo de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = 3x - 7$

b) $y = \frac{1}{x-4}$

c) $w = \frac{1}{(z-8)(z+5)}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2-3x-5}}$

e) $y = \frac{|x|}{x}$

f) $y = [x]$

g) $y = [3x^2 + 7]$

h) $\frac{x}{[x]} = y$

6. Hallar la imágen de cada una de las siguientes funciones:

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = 2n - 1$,

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 16$,

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x^2 + 2$,

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$.

7. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \neq 1 \text{ y } x \neq -1 \\ \\ 0 & \text{si } x = 1 \text{ o } x = -1. \end{cases}$$

Calcular $\{f(x) \mid x \in [0, 1]\}$, $\{f(x) \mid x \in [-1, 0]\}$, $\{f(x) \mid x \in [-1, 0) \cup (0, 1]\}$, y la $\operatorname{Im} f$.

§3

4.3. Igualdad de funciones

Como nos percatamos en los ejercicio anteriores (ver ejercicio 4, página 225), no podemos dejar de mencionar tres cosas para definir bien una función: un dominio, un codominio y una regla de correspondencia propiamente dicha.

La sola mención de la regla no es suficiente para poder hablar de una función (a menos que sean obvios el dominio y el codominio por el contexto donde se trabaje).

Supongamos que $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es par}\}$ y que $f : P \to \mathbb{Z}$, es la función que a cada natural par n, le asocia el entero $\frac{n}{2}$. Si cambiamos el dominio de esta regla, a $\mathbb{N}$ en vez de P, deja de ser función dado que $3 \in \mathbb{N}$ y no le asocia ningún entero.

Análogamente, si cambiamos el codominio, aunque la regla de correspondencia y el dominio permanezcan iguales, la función cambia o incluso la relación deja de ser función: por ejemplo, la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ que a cada $n \in \mathbb{N}$ le asocia el número $\frac{n}{2}$, deja de ser función si en vez de $\mathbb{Q}$ ponemos a $\mathbb{Z}$ como codominio.

Ahora, ¿por qué no son iguales las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dadas por $f(n) = g(n) = n$?. Porque tienen, en cierto modo, propiedades distintas. Por ejemplo, g puede ser "partida", en el sentido de que pode-

mos formar una nueva función $\frac{1}{2}g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dada por $\left(\frac{1}{2}g\right)(n) = \frac{1}{2}n$, y esta construcción no se puede hacer con f sin alterar su codominio.

Así que dos funciones que no tengan el mismo dominio, o no tengan el mismo codominio, aun teniendo la misma regla de correspondencia, para nosotros serán diferentes.

Claramente, aunque dos funciones $f, g : A \to B$ tengan el mismo dominio y el mismo codomonio, si su regla de correspondencia no es la misma, las funciones no pueden ser iguales. En este caso existe por lo menos un elemento a del dominio común de f y g tal que $f(a) \neq g(a)$. Decir que dos reglas de correspondencia sean iguales significa que a cada elemento de sus dominio le asocien, una y otra, exactamente el mismo elemento del codominio. En realidad es como si se tratara de una sola regla de correspondencia expresada de dos maneras distintas. Resumiremos todo esto en una sola definición.

Definición 4.3.1 Dos funciones, $f : A \to B$ y $g : C \to D$ son **iguales** si $A = C$, $B = D$ y si para cada $a \in A$ $f(a) = g(a)$.

Ejemplos:

1. Las funciones $f, g : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x + 1$$

   son iguales. ¿Por qué?.

2. La función $f : \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R}$ dada por la construcción de nuestro ejemplo (3) de la página 217: "a cada t le asociamos un s elemento de $\mathbb{R}$ de la siguiente manera: $(s, 0)$ es el punto de intersección de la recta que pasa por los puntos $(t, 0)$ y (a, b) con el eje Y", es igual a la función $g : \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R}$ tal que $g(t) = \frac{bt}{t-a}$.

Se queda como ejercicio probar que si $C \subseteq A$ y $j : C \to A$ es la inclusión de C en A (recordar que $\forall\, c \in C\ j(c) = c$) entonces $j = id_A|_C$.

4.4. Gráfica de una función

A menudo es necesario en Matemáticas y en la ciencia, construir gráficas de funciones que se expresan mediante alguna fórmula algebraica. De este modo se comprende mejor de qué forma particular depende una variable de otra. Hablaremos primero de las gráficas de funciones reales de variable real (funciones con dominio y codominio en $\mathbb{R}$). Resulta útil hacer los dibujos de estas gráficas en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ con sus ejes perpendiculares: uno que representa los valores de la variable independiente y el otro que representa los valores de la variable dependiente. La gráfica de una función es entonces un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Aclaremos cuál es.

Definición 4.4.1 Sean $D \subseteq \mathbb{R}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ una función. La **gráfica** de f es el conjunto G_f de puntos (x, y) del plano, con $x \in D$ y $y = f(x)$. En otras palabras

$$\begin{aligned} G_f &= \{(x, y) \mid x \in D \quad \text{y} \quad y = f(x)\} \\ &= \{(x, f(x)) \mid x \in D\}. \end{aligned}$$

Si f está dada mediante una fórmula algebraica, su gráfica es el conjunto de los puntos (x, y) cuya ordenada y está ligada con la abscisa mediante la fórmula dada.

Podemos obtener una interpretación geométrica de la gráfica de las funciones reales, localizando en un sistema de coordenadas cartesiano, los elementos de la gráfica de la función.

Ejemplos:

1. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ la función dada mediante la siguiente regla:

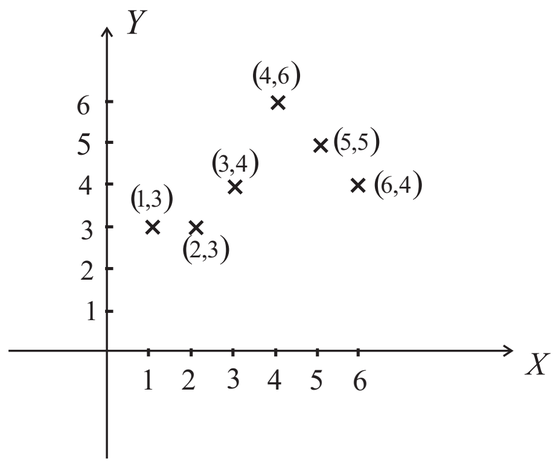
   $f(a) =$ número de letras del nombre en español de número a.

   Por ejemplo, $f(3) = 4$ porque 4 letras tiene la palabra tres.

   La gráfica de la función es

   $$G_f = \{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$$

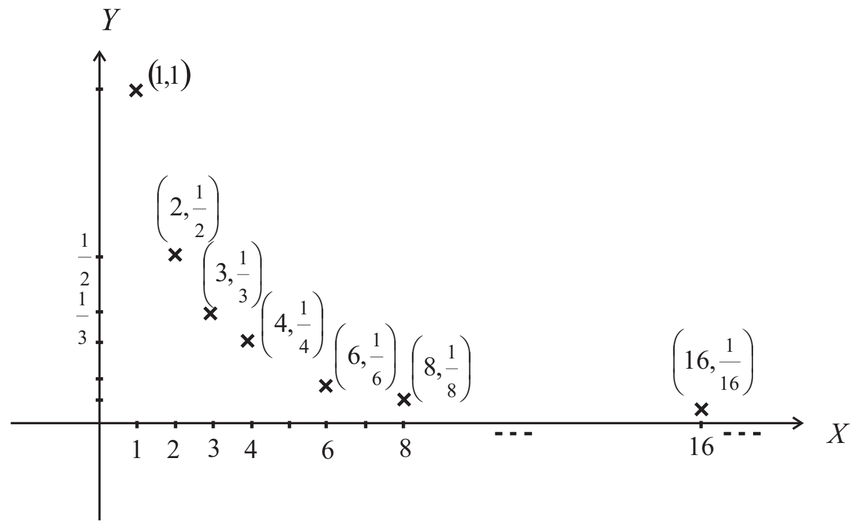
   y su interpretación geométrica son los puntos que se muestran en la figura:



2. Sean $A = \mathbb{N}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = \frac{1}{n}$. Los elementos de la gráfica de f son:

$$G_f = \left\{(1,\, 1),\, \left(2,\, \frac{1}{2}\right),\, \left(3,\, \frac{1}{3}\right),\, \left(4,\, \frac{1}{4}\right),\, \ldots,\, \left(n,\, \frac{1}{n}\right),\, \ldots\right\}.$$

Algunos elementos de G_f se ilustran en la siguiente figura:



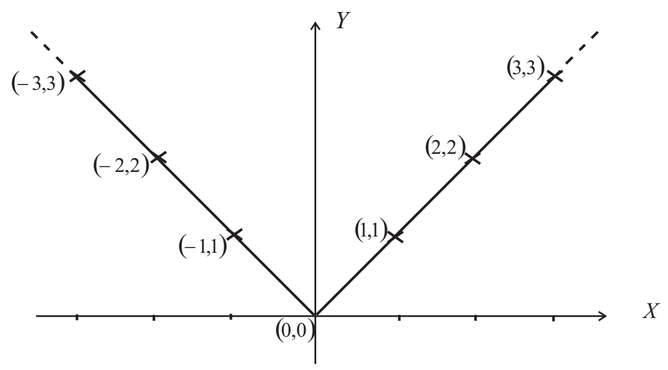
3. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = |x|$. La gráfica de g es

$$G_g = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|\}.$$

Algunos elementos de G_g se pueden obtener haciendo la siguiente tabla

x	1	2	3	0	-1	-2	-3
y	1	2	3	0	1	2	3

Localizamos estos puntos en el plano, los restantes elementos de la gráfica (puesto que $D_g = \mathbb{R}$) los suponemos situados en las semirectas que unen los puntos localizados y "dibujamos" la gráfica de g, como una línea continua que une estos puntos:



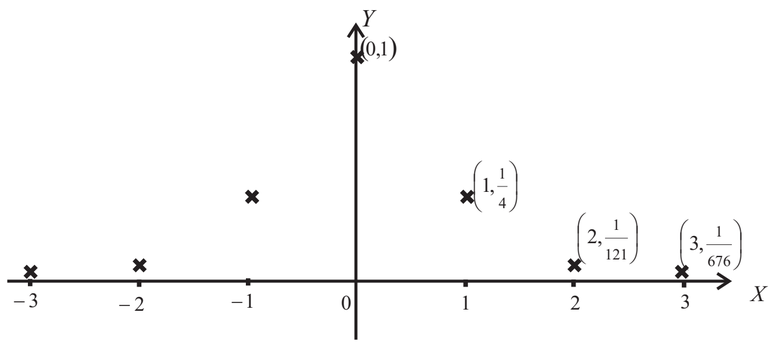
En general, dibujar la gráfica de una función no es sencillo, y con sólo las ideas que hemos dado se pueden cometer serios errores, como se ilustra en el siguiente ejemplo: construyamos la gráfica de la función dada por la fórmula

$$y = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}. \tag{4.10}$$

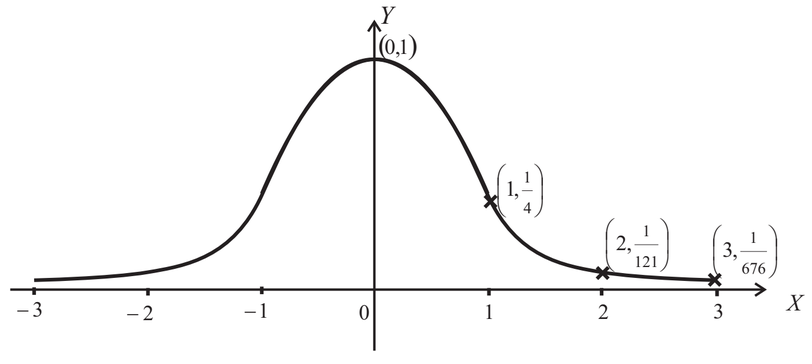
Una tabla de valores para x y y es la siguiente:

x	1	2	3	0	-1	-2	-3
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{676}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{676}$

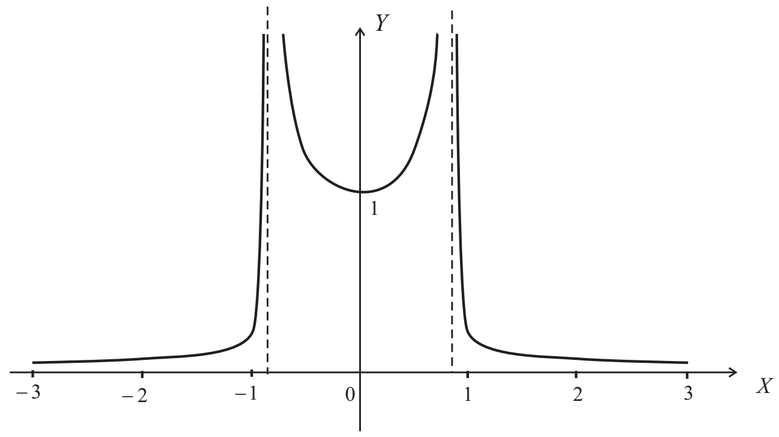
En la siguiente figura se exponen dicho puntos.



Al unir los puntos marcados con una línea continua obtenemos la "gráfica"



Sin embargo, si calculamos y para el valor $x = 0.5$, obtenemos $y = 16$ en la fórmula 4.10. Esto contradice estrepitosamente nuestro dibujo. Trazando mucho mas puntos de la gráfica podríamos observar con mas precisión la forma de ella, que es más o menos así:

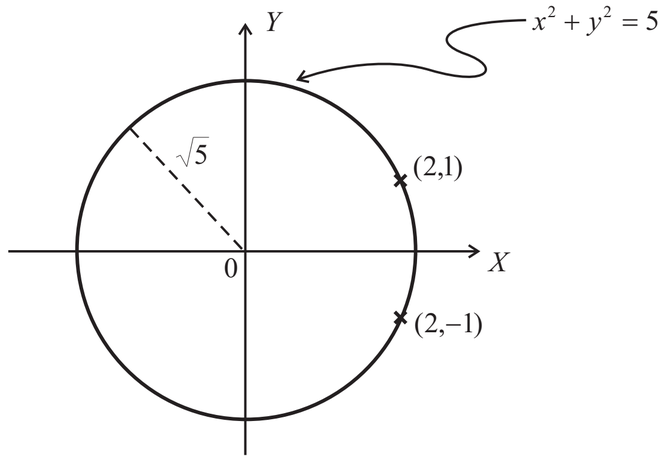


Aunque marcáramos muchos puntos de la gráfica, nunca podríamos estar tan seguros de saber si nuestro dibujo se acerca siquiera a la verdadera gráfica de la función. En cálculo el estudiante tendrá oportunidad de estudiar métodos más efectivos para construir las gráficas de las funciones.

Como subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, las gráficas pueden tener muchas formas, pero no todo conjunto de puntos en el plano es la gráfica de una función. Por ejemplo, consideremos el conjunto

$$A = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 5\}.$$

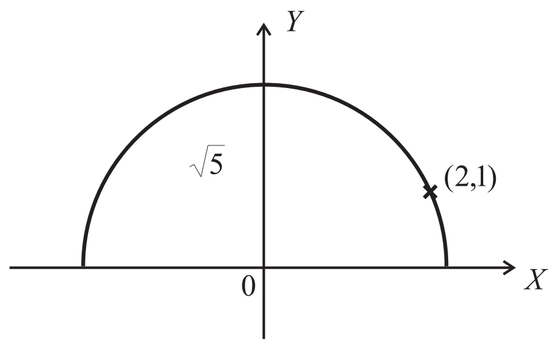
Este conjunto se representa en el plano por medio de una circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio $\sqrt{5}$.



Este círculo no es la gráfica de ninguna función ya que si existiera una función f de la cual A fuera la gráfica, entonces:

$$A = \{(x,\ f(x)) \mid x \text{ es un elemento del dominio de } f\}.$$

Ahora bien, los puntos $(2, 1)$ y $(2, -1)$ están en el círculo porque satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 5$. Esto quiere decir que $(2, 1)$ y $(2, -1)$, al estar en A, son de la forma $(x, f(x))$ con $x \in D_f$. Por lo tanto $f(2) = 1$ y $f(2) = -1$ y este hecho ruin contradice nuestra definición de función, según la cual $f(2)$ debe tener un único valor bien definido. Así que A no es la gráfica de ninguna función real f. Sin embargo, el semicírculo superior es la gráfica de $y = \sqrt{5 - x^2}$, con dominio máximo $[-\sqrt{5},\ \sqrt{5}]$. Análoga-



mente, el semicírculo inferior es la gráfica de $y = -\sqrt{5 - x^2}$, también con dominio máximo $[-\sqrt{5},\ \sqrt{5}]$.

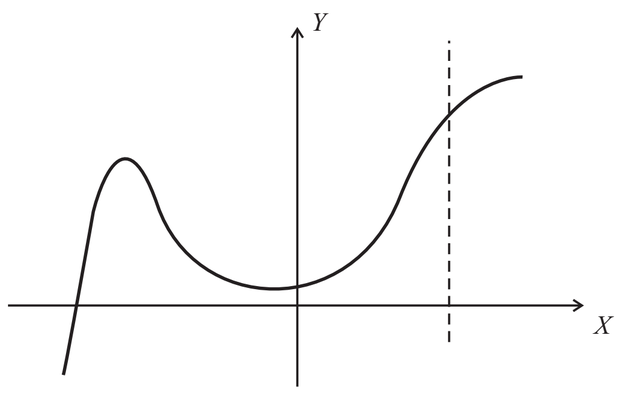
Ahora, ¿cuáles líneas rectas en el plano son gráficas de funciones?. Si una recta no es vertical, tiene la forma $y = mx + b$, así que es la gráfica

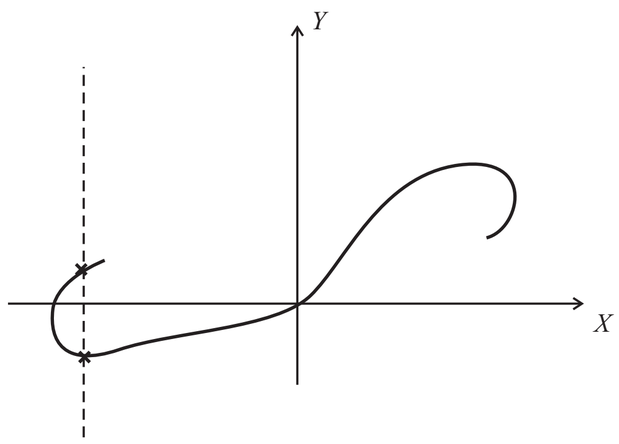
de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = mx + b$. (Si $m = 0$ la función es una constante). Una recta vertical no es la gráfica de una función pues si la recta es $x = a$ entonces $f(a)$ no está determinado de manera única: en efecto, la recta es el conjunto $A = \{(x,\, y) \mid x = a,\ y \in \mathbb{R}\} = \{(a,\, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, de tal forma que no existe ninguna función f tal que

$$A = \{(x,\, f(x)) \mid x \in D_f\}.$$

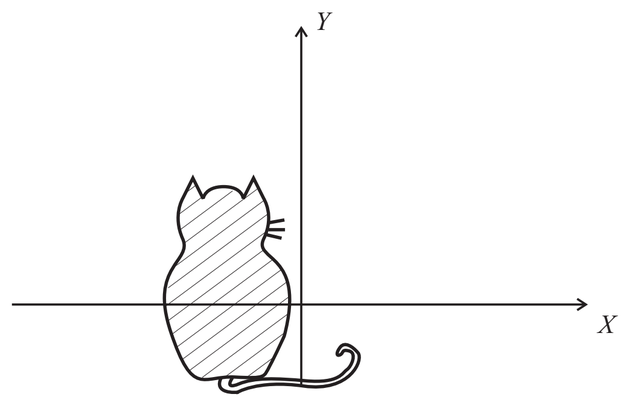
Ahora nos preguntamos ¿cómo determinar si un conjunto de puntos en el plano es la gáfica de una función?. Hay un criterio muy simple llamado criterio de la recta vertical que dice así

"Un conjunto de puntos en el plano es la gráfica de una función real si y sólo si toda recta vertical intersecta al conjunto en a lo más un punto". Así: Esta curva sí es la gráfica de una función ya que ninguna recta vertical la cruza más de una vez.





Esta curva NO es la gráfica de una función ya que alguna recta vertical la corta más de una vez.



Este gatito no es la gráfica de ninguna función f.

Para demostrar el criterio, supongamos primero que un conjunto A en el plano es la gráfica de una función f (con dominio y codominio subconjuntos de $\mathbb{R}$). Si la recta $x = a$ intersecta a A en algún punto (x_0, y_0), ese punto tiene que ser el punto $(a, f(a))$ y sólo ese punto. Esto se debe a que $x_0 = a$ por estar (x_0, y_0) en la recta $x = a$ y $y_0 = f(a)$ por ser (x_0, y_0) un punto de la gráfica de f.

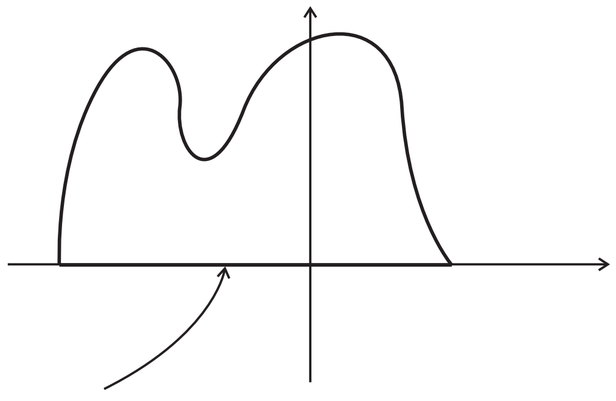
Supongamos ahora que toda recta vertical intersecta al conjunto A en a lo más un punto. Sean

$$D = \{a \in \mathbb{R} \mid \text{ la recta } x = a \text{ intersecta a } A \text{ en un punto } (a, y_a)\}$$

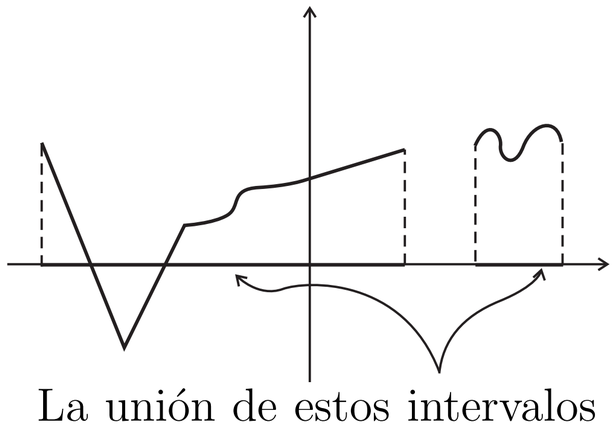
y $f : D \to \mathbb{R}$ tal que $f(a) = y_a$. Entonces f es una función cuya gráfica, G_f, coincide con A, ya que si $(a, f(a)) \in G_f$ con $a \in D$, entonces $(a, f(a)) \in A$ pues $f(a) = y_a$ y $(a, f(a))$ es el punto de intersección de A con la recta $x = a$. Por otro lado, si $(a, b) \in A$ entonces (a, b) es el único punto de intersección (por hipótesis) entre A y la recta $x = a$. Por consiguiente $a \in D$ y $b = y_a = f(a)$, con lo cual $(a, b) = (a, f(a)) \in G_f$.

La demostración del criterio nos permite observar también que si un conjunto de puntos en el plano es la gráfica de una función, el dominio de la función es el conjunto de puntos x_0 tal que la recta vertical $x = x_0$

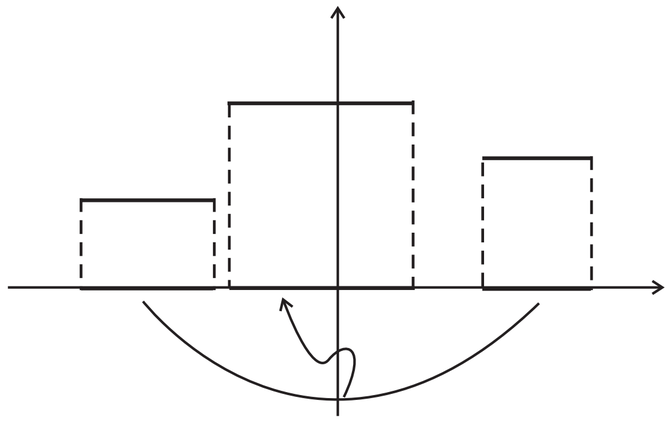
intersecta a la gráfica. Así



Este conjunto es el dominio de la función cuya gráfica es la curva.



La unión de estos intervalos es el dominio de la función cuya gráfica ha sido dibujada.



También la unión de los intervalos señalados es el dominio de la función representada por esta gráfica.

Ejercicios 3.

1. Demuestre que las funciones $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dados por

$$f(x) = |x| \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{x^2}$$

son iguales.

2. Trace aproximadamente las gráficas de las siguientes funciones, si suponemos que su dominio es $\mathbb{R}$.

$a)$ $y = x^2$

$b)$ $f(x) = 3x + 2$

$c)$ $h(x) = (x-1)^2$

$d)$ $g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

3. Trace las gráficas de las siguientes funciones

   a) $f_1 : [-5, 5] \to \mathbb{R}$ tal que $f_1(x) = -\sqrt{25 - x^2}$.

   b) $f_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f_2(x) = 1 + x$.

   c) $f_3 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f_3(x) = 1 - x$.

   d) $f_4 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f_4(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

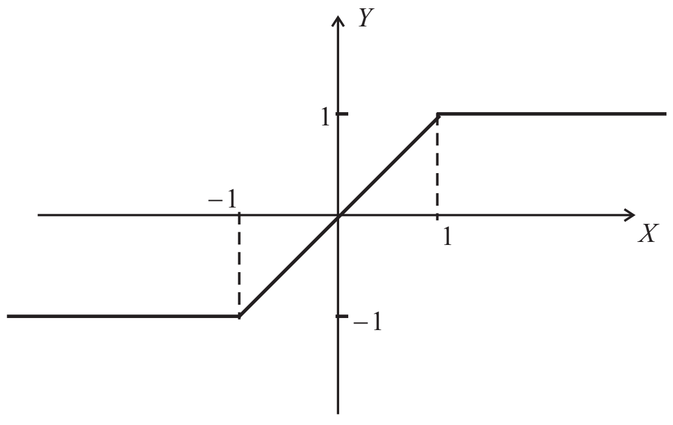
4. Dada $f(x) = 2x^4 - x^3$, represente en el plano los conjuntos:

$$A_1 = \{(x, f(x)) \mid x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}\} \qquad \text{y}$$

$$A_2 = \{(x, f(x)), \mid x \in \{-2, -1.9, -1.8, -1.7, \ldots, -1.1, -1, -0.9, -0.8, \ldots, -0.1, 0, 0.1, 0.2, \ldots, 0.9, 1, 1.1, 1.2, \ldots, 1.9, 2\}\}$$

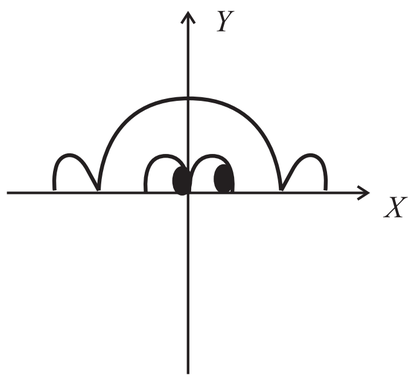
   Estos dos conjuntos son subconjuntos de G_f. Trace G_f en el plano, aproximadamente.

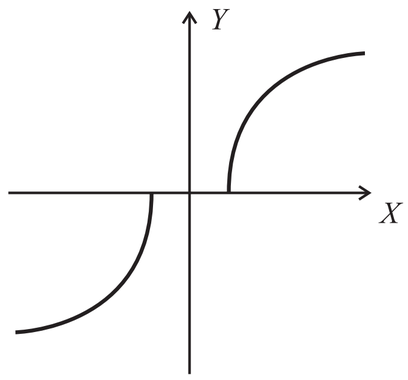
5. La siguiente gráfica representa una función con dominio en $\mathbb{R}$. Encuentre dicha función

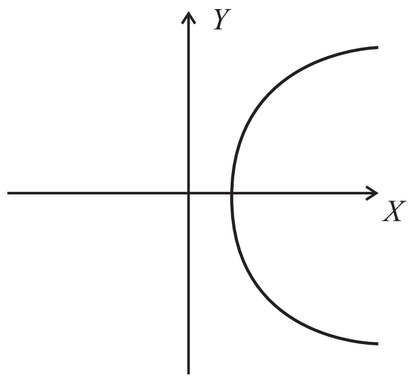


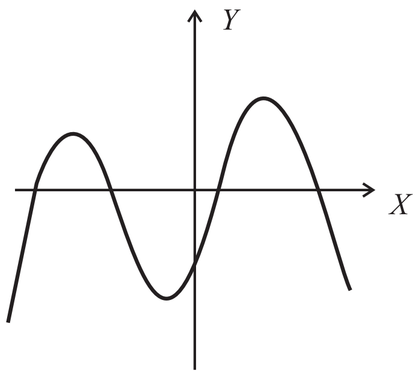
6. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos representan gráficas de funciones?

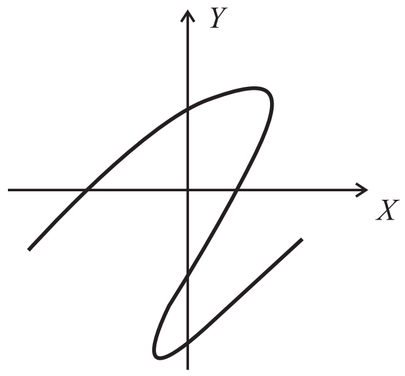
7. Haga un dibujo de la gráfica de las siguientes ecuaciones. Entonces, aplicando el criterio de la recta vertical, decida si esa gráfica representa o no una función

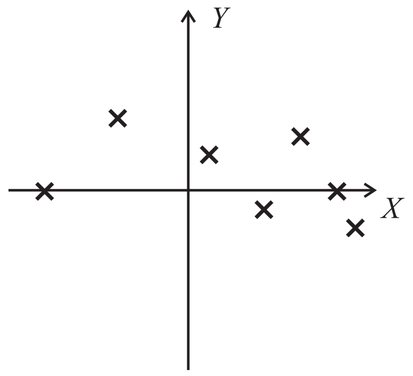








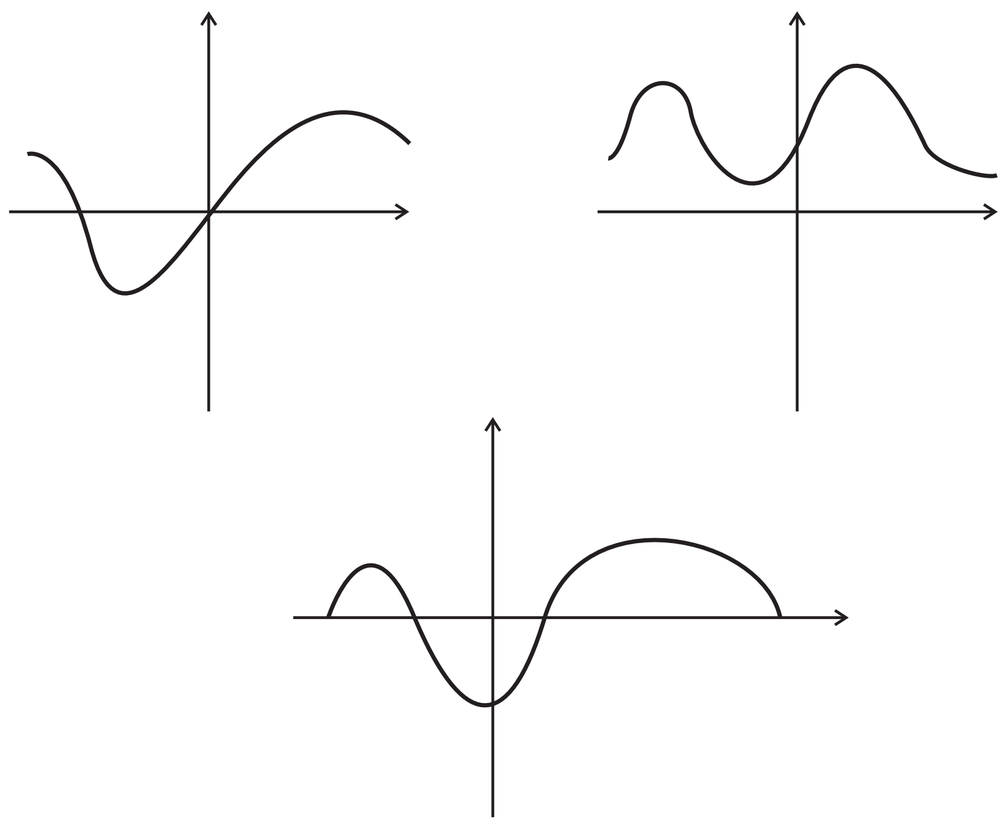




a) $x - y + 1 = 0$.
b) $y = x^3 + 2$.
c) $xy = 1$.
d) $x^2 + y^2 = 4$.
e) $|x| + |y| = 5$.
f) $x^2 + y^2 = -25$.
g) $y = \frac{x^2-16}{x+4}$.

8. A continuación se muestran tres gráficas de funciones f. Dibuje, en el mismo plano donde se encuentra f, las gráficas de cada una de las siguientes funciones

   I) $g : D_f \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = |f(x)| \quad \forall\, x \in D_f$.
   II) $h : D_f \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(|x|) \quad \forall\, x \in D_f$.
   III) $k : D_f \to \mathbb{R}$ dada por $l(x) = f(-x) \quad \forall\, x \in D_f$.



9. Sea $B \subseteq \mathbb{R}$. Si $f, g : D \to \mathbb{R}$ son funciones tales que $G_f = G_g$, entonces ¿f y g son iguales? ¿Por qué?

§5

4.5. Composición de funciones

Definición 4.5.1 Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones. La **composición** de f con g, denotada por $g \circ f$, es la función $g \circ f : A \to C$ tal que $\forall\, a \in A$, $g \circ f(a) = g(f(a))$.

Notemos que:

1) Del hecho que f y g sean funciones, podemos asegurar que $g \circ f$ también lo es, esto es, la regla $g \circ f$ tiene las propiedades que definen una función.

2) Dadas cualesquiera dos funciones f y g, no necesariamente se puede hablar de la función composición $g \circ f$, como lo muestra el siguiente ejemplo: si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = x$ y $g : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ es tal que $g(x) = \sqrt{x}$, entonces si aplicamos la definición anterior sin detenernos a reflexionar un momento diríamos que $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la "función" dada por $g(f(x)) = g(x) = \sqrt{x}$. Sin embargo, al considerar $-1 \in \mathbb{R}$ tendríamos que $g \circ f(-1) = g(-1) = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$, es decir, esta "función" no asocia a -1 ningún número real en contradicción con nuestra definición de función.

   Entonces, dadas dos funciones f y g ¿Cuándo vamos a poder hablar de $g \circ f$? Es un ejercicio para el alumno que pruebe que basta pedir que $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Dom} g$.

Ejemplos:

1. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ dada por $g(x) = |x|$. Entonces $g \circ f$ es una función tal que $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ y está dada por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = |x^2 - 1|.$$

   Particularmente si $x = 2$,

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(2^2 - 1) = g(3) = |3| = 3$$

   ¿se podrá definir $f \circ g$? ¿Por qué?

2. Como antes, sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 1$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 2x + 4$. Podemos definir las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$ y las reglas que las definen son:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 4) = (2x + 4)^2 - 1 = 4x^2 + 16x + 15$$

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) + 4 = 2x^2 + 2.$$

   A partir de este último ejemplo puede observarse que la composición de funciones no es conmutativa.

   Algunas propiedades que sí satisface la composición de funciones son las siguientes

1. Sea $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ funciones. Se cumple que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, esto es, la composición de funciones es asociativa.

   En efecto, sea $a \in A$ entonces

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(a) &= h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))) \\ &= (h \circ g)(f(a)) = ((h \circ g) \circ f)(a).\end{aligned}$$

2. Sea $f : A \to B$ cualquier función, se cumple que:

   $a)$ $f \circ id_A = f$.

   $b)$ $id_B \circ f = f$.

   La demostración de esta afirmación es un ejercicio.

Ejercicios 5.

1. Sea P el conjunto de palabras del idioma español y sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = 3n$ y $g : \mathbb{N} \to P$ la función definida por $g(n)$ =nombre de n en español. Obtenga

   $a)$ $(g \circ f)(3)$ y $\qquad$ $b)$ $(g \circ f)(5)$.

2. A continuación se dan las reglas de correspondencia de funciones f y g. Siguiendo el criterio del "dominio máximo" de definición, determinar si se puede(n) definir $f \circ g$ y/o $g \circ f$ y en caso de que así sea determinar su dominio, codominio y regla de correspondencia.

   $a)$ $f(x) = \sqrt{x+3}$ $\qquad$ $g(x) = x^2 - 1$.

   $b)$ $f(x) = |x|$ $\qquad$ $g(x) = |x - 2|$.

   $c)$ $f(x) = [x]$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{2}$.

   $d)$ $f(x) = x^2$ $\qquad$ $g(x) = \sqrt{x}$.

   $e)$ $f(x) = x^2$ $\qquad$ $g(x) = -\sqrt{x}$.

3. Defina dos funciones $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}$ e $\operatorname{Im}(g \circ f) = \{5\}$.

4. Dé la regla de definición de $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si

$$f(x) = \sqrt{x+1} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{1+x}.$$

5. Si $f : A \to B$ es cualquier función, entonces pruebe que

   a) $f \circ id_A = f$ y *b*) $id_B \circ f = f$.

6. Investigue alguna condición para que: si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones, se cumpla que $g \circ f = f \circ g$. (¿Cómo debe ser f y g?).

7. Si f y g son cualesquiera dos funciones tales que está definida $g \circ f$, investigue cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera.

   a) $\operatorname{Im}(g \circ f) \subseteq \operatorname{Im} g$. *b*) $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Im}(g \circ f)$.

§6

4.6. Funcion inyectivas

Estamos ahora interesados en distinguir a las función en base a ciertas propiedades que les sean características. Comentemos inicialmente algunos ejemplos.

Sea A el conjunto de las personas que trabajan y que perciben un salario. Consideremos la función $s : A \to \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$s(a) = \text{cantidad en pesos del salario de } a.$$

Esta función tiene sus "particularidades", entre ellas la más "desagradable" es que nos convierte a muchos en "gentes del montón". Esto ocurre sencillamente porque, un gran número de elementos de A, tiene la misma imágen, o sea, ganan el mismo salario. Por ejemplo,

s(Sabás Tinajero) = salario mínimo
s(Fortunato Buendía) = salario mínimo
s(Gregorio Malpica) = salario mínimo
$\vdots$
etc.

Otro ejemplo:

Sea $\mathcal{R}$ =conjunto de "mexicanos" que tienen depositado su dinero en el "Manhatan City Bank of U.S.A", y sea $\$: \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ (la $\mathcal{R}$ es de ricos) la función tal que $\$(a)$ =número de cuenta de a (en aquel banco).

Por las características de la función, no puede ocurrir que más de un elemento de $\mathcal{R}$ tenga igual imágen, pues sería catastrófico para Don Miguel E. Templos que al tratar de retirar "sus lanas", Don Jorge Díaz C. se le hubiera adelantado (si pudieran tener el mismo número de cuenta).

Son particularmente importantes las funciones que tienen la propiedad del último ejemplo. A ellas les daremos un nombre.

Definición 4.6.1 Una función $f : A \to B$ se dirá **inyectiva** si elementos distintos de A tienen siempre imágenes distintas, esto es

$$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a'), \qquad (a,\, a' \in A).$$

Recordar del capítulo de lógica que esta condición es equivalente a

$$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'.$$

Ejemplos:

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 5$. Afirmamos que esta función es inyectiva. En efecto, si $f(x) = f(x')$, entonces $2x + 5 = 2x' + 5$ y, por consiguiente $2x = 2x'$ y por tanto $x = x'$.

2. Más generalmente, dados a, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ fijos, la función "lineal" $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax+b$, es inyectiva pues si $f(x) = f(x')$, $ax + b = ax' + b \Rightarrow ax = ax'$ y como $a \neq 0$ se concluye que $x = x'$.

3. En cambio ninguna función cuadrática del tipo $f(x) = ax^2 + b$ con $a \neq 0$ puede ser inyectiva, dado que cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $f(x) = f(-x)$, y si $x \neq 0$, $x \neq -x$.

4. La función identidad $id_A : A \to A$ es claramente inyectiva (¿está usted de acuerdo?). Análogamente, si $A \subseteq B$, la función inclusión $i : A \to B$ dada por $i(a) = a$ es inyectiva.

5. En cambio la función valor absoluto $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ no es inyectiva; por ejemplo $f(1) = f(-1) = 1$. Pero si se define $f_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ como $f_1(x) = f(x) = |x|$ entonces f_1 sí es inyectiva ¿Puede usted, paciente lector, explicar por qué?

Para funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ puede comprobarse si son o no inyectivas observando su gráfica, de la siguiente manera:

Si alguna recta horizontal corta a G_f en más de un punto, dicha función no puede ser inyectiva y recíprocamente.

Para ver que esto es cierto, recordemos que

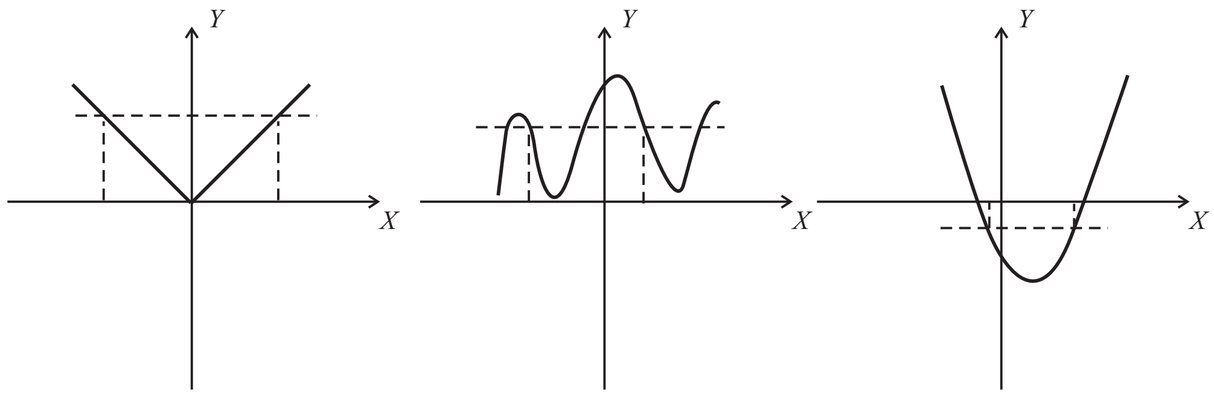
$$G_f = \{(x,\, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

y que cada recta horizontal es un conjunto de puntos en el plano de la forma $(x,\, a)$, donde $x \in \mathbb{R}$ y a es constante. Estas rectas pueden

representarse analíticamente mediante la ecuación $y = a$. Si una tal recta corta a G_f en más de un punto, se tendrán un par de puntos distintos $(x,\, f(x))$ y $(x',\, f(x'))$ de G_f en la recta; por lo tanto dichos puntos deben satisfacer que sus segundas coordenadas deben ser iguales al número a, esto es $f(x) = f(x') = a$ con $x \neq x'$, por lo cual f no es inyectiva.

Recíprocamente, supongamos que f no es inyectiva. Esto significa que existen x y $x' \in \mathbb{R}$, $x \neq x'$ tales que $f(x) = f(x') = b$. Entonces la recta horizontal que pasa por $(x,\, b)$ y $(x',\, b)$ contiene por lo menos estos puntos de G_f.

Según este criterio, ninguna de las funciones cuyas gráficas son las siguientes puede ser inyectiva:



He aquí algunas propiedades importantes de las funciones inyectivas.

Teorema 4.6.1 *Si $f : A \to B$, $g : B \to C$ son funciones, entonces*

(a) Si $g \circ f$ es una función inyectiva, debe ser f una función inyectiva.

(b) Si f y g son funciones inyectivas, así lo es $g \circ f$.

Demostración:

(a) Sean $a_1,\, a_2 \in A$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$; queremos concluir que $a_1 = a_2$. Para esto apliquemos g y obtenemos $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$,

que es equivalente a $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$, y puesto que $g \circ f$ es inyectiva, debe tenerse $a_1 = a_2$, como pretendíamos.

(b) Sean nuevamente a_1, $a_2 \in A$ tales que $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$ esta igualdad es, por definición, equivalente a $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ y como g es inyectiva, debe ser $f(a_1) = f(a_2)$ y como f también lo es, $a_1 = a_2$.

Ejercicios 5.

1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son inyectivas:

   a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(n) = -n$.

   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

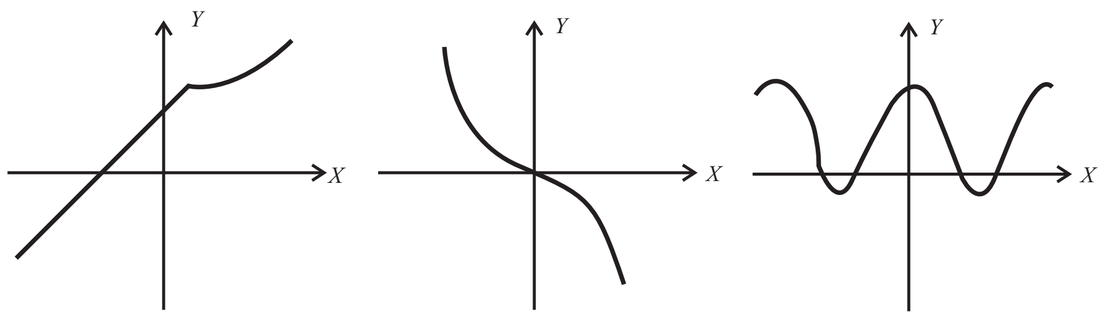
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

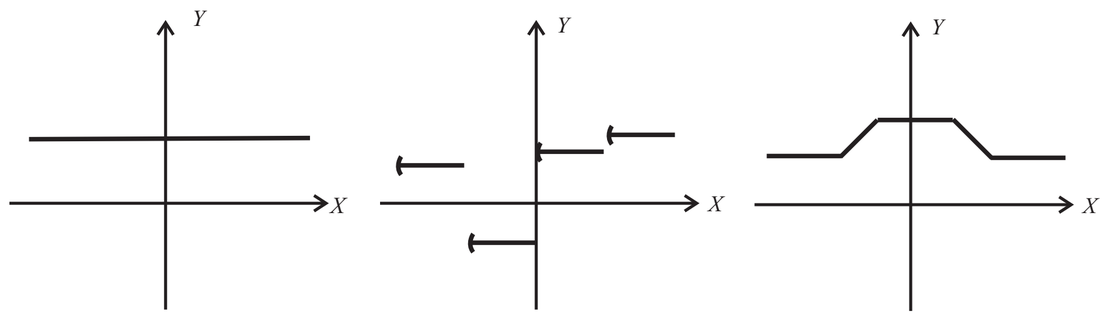
   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x - |x|$.

   d) Si A es el conjunto de estudiantes de Matemáticas Elementales y $B = \{0, 1, \ldots, 9, 10\}$, la función $f : A \to B$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \text{calificación de } x \text{ en el exámen de admisión} \\ 0 \text{ si } x \text{ no presentó exámen (si entró por palancas).} \end{cases}$$

2. Mediante la observación de las gráficas siguientes, decir cuáles de ellas representan funciones inyectivas:





3. Construya ejemplos donde

   a) $f \circ g$ sea inyectiva y f no lo sea.

   b) f sea inyectiva y $f \circ g$ no lo sea.

   c) g sea inyectiva y $f \circ g$ no lo sea.

4. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} 2n-1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

   ¿es f inyectiva?. ¿Por qué?

5. Determinar si $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

   es inyectiva.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, decimos que f es estrictamente creciente si y sólo si para cualquier $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$.

   Probar que si f es estrictamente creciente, entonces f es inyectiva.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función inyectiva. ¿Puede encontrar x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ para los que se cumpla que:

   a) $x_1 < x_2$ y *b*) $f(x_2) = f(x_1)$?

   ¿Por qué?, ¿qué puede concluir de su respuesta?

8. Muestre que la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = 2n + 1$ es inyectiva.

9. Descomponga la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x^2 + 2x + 1$, como la composición de dos funciones f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, esto es, tal que $h = g \circ f$.

   h no es inyectiva, ¿Cuál de las dos f o g no es inyectiva?

10. *a*) Pruebe que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 15$ no es inyectiva.

    b) Pruebe que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 2x^2 - 3x + 2$ no es inyectiva.

    c) Verificar que ninguna función cuadrática general del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ puede ser inyectiva.

§7

4.7. Funciones suprayectivas

A manera de comentario previo, estudiemos la siguiente función: Sea A el conjunto de casas administradas por INFONAVIT y B el conjunto de personas con derecho a tener una de estas casas. Sea $f : A \to B$ la función con regla de correspondencia:

$$f(a) = \text{propietario (legal) de } a.$$

Nos preguntamos: ¿ocurre que cada elemento de B es imágen de algún elemento de A?, esto es, ¿cada persona con derecho a tener una de estas casas la tiene? Ustedes saben que no es así.

Una situación distinta se da en el siguiente ejemplo: Sea A el conjunto de personas para las que aún vive su madre y sea B el conjunto de mujeres que tienen hijos vivos. Si $g : A \to B$ es la función tal que $g(a) = b =$ madre de a, en este caso sí ocurre que dado cualquier $b \in B$,

existe $a \in A$ con $f(a) = b$. Por cierto que una expresión muy nuestra se empeña en negar esto.

Las funciones con esta propiedad se llaman funciones suprayectivas. Precisamos esto en la siguiente definición.

Definición 4.7.1 Una función $f : A \to B$ se dirá que es **suprayectiva** (o función **sobre**, **sobreyectiva**) si para cada $b \in B$, puede hallarse $a \in A$ con la propiedad de que $f(a) = b$.

Los siguientes ejemplos son principalmente funciones con dominio y codominio subconjuntos de $\mathbb{R}$, esto es así porque son las funciones que estudiaremos con más detalle en este capítulo.

Ejemplos:

1. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ es no suprayectiva porque para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = |x| \geq 0$. Así, no existe $x_0 \in D_f = \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = -1$, a pesar de que $-1 \in \mathbb{R} =$ codominio de f.

2. Sea $f : A \to B$ definida por $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. Afirmamos que f sí es suprayectiva. Para comprobar esto, sea y en el codominio de f, que es igual a $\mathbb{R}$; queremos encontrar $x \in D_f = \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, o equivalentemente, tal que $ax + b = y$. De esta última ecuación podemos ver que una tal x debe satisfacer que $x = \frac{y-b}{a}$ (despejando x).

   Comprobemos que en efecto ocurre que $f(x) = y$:

$$f(x) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) = a\left(\frac{y-b}{a}\right) + b = y,$$

   como queríamos.

3. Sea ahora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Igual que en los ejemplos anteriores, nos interesa investigar si esta función es o no suprayectiva. Con este propósito observemos que

$f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$. Analizando los factores $(x-2)$ y $(x-1)$, podemos ver que

$$(x-2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 2, \qquad x-1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1$$

y también que

$$x-2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 2; \qquad x-1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1.$$

Se infiere de aquí que si $x \geq 2$, ambos factores son positivos y que si $x < 1$, ambos factores son negativos. Así que

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \geq 0 \quad \text{si} \quad 2 \leq x \quad \text{o} \quad x < 1 \quad \text{y}$$
$$f(x) = x^2 - 3x + 2 < 0 \quad \text{si} \qquad 1 < x < 2.$$

Pero

$$\begin{aligned} 1 < x < 2 \quad &\Rightarrow \quad -1 < x-2 < 0 \quad \text{y} \quad 0 < x-1 < 1 \\ &\Rightarrow \quad -1(x-1) < (x-2)(x-1) \quad \text{y} \quad -1 < -(x-1) \\ &\Rightarrow \quad -1 < -(x-1) < (x-2)(x-1) = f(x), \end{aligned}$$

es decir, hemos demostrado que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2 > -1$ y, por lo tanto que esta función es *no suprayectiva*.

4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = 7x^3 - 2$ entonces f es inyectiva y suprayectiva. En efecto, si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ son tal que $7x_1^3 - 2 = 7x_2^3 - 2$ entonces $7x_1^3 = 7x_2^3$, lo cual nos dice que $x_1^3 = x_2^3$ que implica que $x_1 = x_2$ (¿por qué?) y en consecuencia y es inyectiva. También si $y \in \mathbb{R}$, quisíeramos encontrar $x \in \mathbb{R}$ con $7x^3 - 2 = y$ pero esto es equivalente a que $x^3 = \frac{y+2}{7}$ o bien que $x = \sqrt[3]{\frac{y-2}{7}}$. El estudiante puede verificar entonces que $f\left(\sqrt[3]{\frac{y-2}{7}}\right) = y$, es decir, f es suprayectiva.

5. Definimos aquí una función con la misma regla que en el ejemplo 1, a saber, $g(x) = |x|$, pero ahora elijamos el codominio de g como $\mathbb{R}_+$, así $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. La función g así definida es ahora suprayectiva, claramente (¿o no?).

Este último ejemplo muestra que el codominio de una función influye de forma importante para que ésta sea o no sea suprayectiva. De esto podemos ver lo importante que es, que en la definición de una función no sólo se dé la regla de asociación, sino que también se den el dominio y codominio de la función.

6. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por la regla $f(x) = ax^2 + b$, $a \neq 0$, no es suprayectiva. No ocasiona gran dificultad verificar la veracidad de esta afirmación, porque:

   I) Si $a > 0$, como $x^2 \geq 0$, cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $ax^2 \geq 0$ y entonces $ax^2 + b \geq b$. Similarmente,

   II) Si $a < 0$, $x^2 \geq 0$ y entonces $ax^2 \leq 0$. Por lo tanto, $ax^2 + b \leq b$.

   En el primer caso, para $y < b$ no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, cumpliéndose algo similar en el segundo caso.

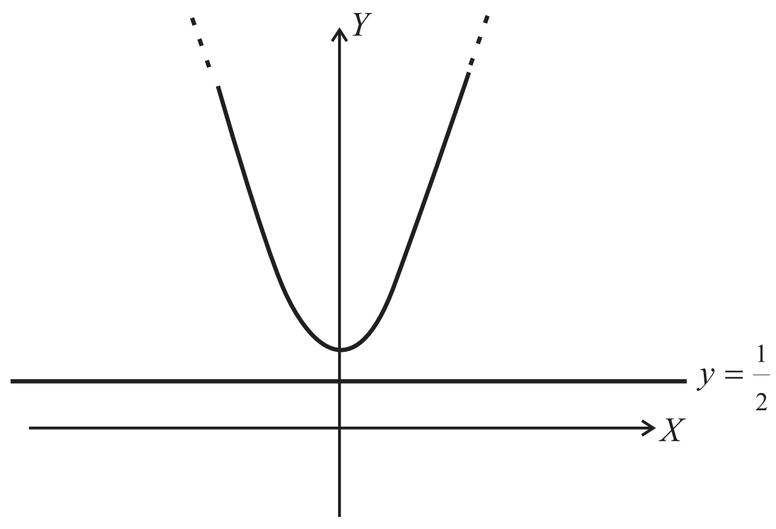
Igual que para las funciones inyectivas, tenemos un "método" geométrico que nos permite decidir cuándo una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es sobreyectiva, éste es como sigue: si la gráfica de f, G_f, es tal que cualquier recta horizontal la corta en al menos un punto, entonces f es sobreyectiva y viceversa.

Justifiquemos esta afirmación: Sea $c \in \mathbb{R}$ cualquier número real. Suponiendo que cualquier recta horizontal corta a G_f, queremos hallar un $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$. Con este propósito, consideremos la recta horizontal $y = c$. Como esta recta corta a G_f, existe un punto (x_0, c) de la recta, que esta en G_f. Por lo tanto, $(x_0, c) = (x_0, f(x_0))$ y por ende $f(x_0) = c$, como queríamos.

Si ahora f es sobre y l es la recta horizontal dada por $y = k$, existe $b_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(b_0) = k$. Con esto, el punto (b_0, k) está en G_f y $(b_0, k) \in l$. Concluimos que l corta a G_f.

Por ejemplo, si $f(x) = x^2 + 1$, f no es sobre: La recta $y = \frac{1}{2}$ no la corta.

Dos propiedades sobresalientes que cumplen las funciones sobreyectivas, las establecemos en el siguiente teorema.



Teorema 4.7.1 *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones.*

(a) Si la composición $g \circ f : A \to C$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

(b) Si f y g son sobreyectivas, así lo es $g \circ f$.

Demostración:

(a) Sea $c \in C$ cualquiera, queremos encontrar $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Sabemos que $g \circ f$ es sobre, así que existe $a \in A$ tal que $(g \circ f)(a) = c$, y puesto que $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = c$, $b = f(a)$ es el elemento buscado.

(b) Se deja como ejercicio. ■

Ejercicios 6.

1. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   Decida si esta función es sobreyectiva y/o inyectiva.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x^2 + x + 3$. ¿Puede hallar $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$? ¿Por qué?

3. Estudie la gráfica de f para decidir.

   a) Si f es inyectiva

   b) Si f es sobreyectiva

   donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } 2 \leq x \\ x & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

4. Definimos $f : \mathbb{R} \to (0,\, 1]$ por $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$. ¿Es f suprayectiva?, ¿es f inyectiva? Argumente su respuesta.

5. Dé un ejemplo de funciones f, g tales que $g \circ f$ es suprayectiva y f no lo es.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 5x - 8$ ¿Qué subconjunto de $\mathbb{R}$ debe ser B para que $f : \mathbb{R} \to B$ sea suprayectiva?

7. Comprobar que la función cuadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, no es suprayectiva.

8. Estudie acerca de la suprayectividad o inyectividad de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$.

9. Analizar si la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + b$ es inyectiva y/o suprayectiva.

4.8. Funcion biyectivas

Como hemos visto en la sección precedente, hay funciones que son:
(a) inyectivas pero no suprayectivas:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{dada por} \quad f(n) = 2n.$$

(b) Suprayectivas pero no inyectivas:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \quad \text{dada por} \quad f(x) = |x|.$$

(c) no suprayectivas y no inyectivas:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad f(x) = |x|.$$

(d) inyectivas y suprayectivas:

Las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por una regla del tipo $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$.

Las funciones del último tipo son de gran importancia en Matemáticas y reciben un nombre particular.

Definición 4.8.1 Una función $f : A \to B$ se dirá **biyectiva** si es suprayectiva e inyectiva.

La definición anterior puede también establecerse diciendo que una función $f : A \to B$ es biyectiva si y sólo si para cada $b \in B$ existe un *único* $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

las funciones lineales (las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dadas por una regla $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$) son funciones biyectivas.

Una de las propiedades primordiales de las funciones biyectivas se estudia en la siguiente sección.

§9

4.9. Función inversa

Sea $f : A \to B$ una función. Consideremos la siguiente regla para asociar elementos de B con elementos de A:

"Si $b \in B$, le asociamos un elemento $a \in A$ que tenga la propiedad de que $f(a) = b$".

Esta regla evidentemente no siempre define una función; depende de las características de f. Por ejemplo, si f es no suprayectiva, hay al menos un elemento $b \in B$ para el que no es posible hallar un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. En este caso, de acuerdo con nuestra regla que define una función, no ocurre que cada elemento de B tenga asociado uno de A. Ahora, si f es suprayectiva pero no inyectiva, existen dos elementos distintos $a_1 \neq a_2$ en A que cumplen que $f(a_1) = f(a_2) = b$. Conforme nuestra regla, a $b \in B$ debemos asociarle a_1 y también a_2, con lo que la regla que estamos considerando tampoco define una función.

Supongamos ahora que f es suprayectiva e inyectiva, es decir, biyectiva. Entonces nuestra regla define una función porque:

1. Para cada $b \in B$ siempre existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. a es el asociado de b.

2. El $a \in A$ asociado a $b \in B$ es único puesto que si a_1 y a_2 son asociados de b, $f(a_1) = f(a_2) = b$ y por lo tanto $a_1 = a_2$, ya que f es inyectiva.

La siguiente definición resume los anteriores comentarios.

Definición 4.9.1 Sea $f : A \to B$ una función biyectiva. La función $g : B \to A$, definida mediante la regla $g(b) = a$, donde a es tal que $f(a) = b$, se llama la **función inversa** de f y la denotaremos por $g = f^{-1}$.

A manera de ejemplo, si $f : A \to B$ es cualquier función, también lo es $f_1 : A \to \operatorname{Im} f$ definida igual que f, esto es, $f_1(a) = f(a)\ \forall\, a \in A$. f_1 es siempre suprayectiva, de tal suerte que si f es inyectiva, f_1 es biyectiva y entonces existe $f_1^{-1} : \operatorname{Im} f \to A$.

Podemos también, en algunos casos, restringir el dominio de una función $f : A \to B$ a un subconjunto $A_1 \subseteq A$ de tal manera que se tenga una función inyectiva $f|_{A_1} : A_1 \to B$ y si $f|_{A_1}$ es también suprayectiva,

se tienen las condiciones para la existencia de $(f|_{A_1})^1$. Ejemplifiquemos esto:

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ definida por $f(x) = x^2$. Esta función es suprayectiva (para cada $y \geq 0$ existe al menos una raíz cuadrada), pero no es inyectiva; recordemos que $f(-1) = (-1)^2 = 1 = 1^2 = f(1)$.

Sea ahora $g : f|_{\mathbb{R}_+ \cup \{0\}} : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Afirmamos que g es inyectiva. Recordemos que si x_1, $x_2 \in \mathbb{R}_+$ y $x_1^2 = x_2^2$ entonces $x_1 = x_2$. Además también es suprayectiva. ya que para cada $y \geq 0$ existe $x \geq 0$ tal que $x^2 = y$. g es así biyectiva y existe $g^{-1} : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. La regla algebraica que define a g^{-1} es $g^{-1}(y) = +\sqrt{y}$.

Cuando se estudian funciones con dominio y codominio subconjuntos de $\mathbb{R}$, si una función f es tal que existe f^{-1}, es útil conocer alguna fórmula algebraica que defina a f^{-1}. En algunas ocasiones esto puede obtenerse "despejando" x de la ecuación $f(x) = y$. Por ejemplo, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función dada por $f(x) = 3x + 1$, f es biyectiva y por consiguiente existe $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Obtenemos la fórmula que define a f^{-1} como sigue:

$$f(x) = y \Rightarrow 3x + 1 = y \Rightarrow x\frac{y-1}{3}$$

y $f^{-1} = \frac{y-1}{3}$ es la fórmula buscada.

Como otro ejemplo, si $f : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to [1, \infty)$ está dada por $f(x) = x^2 + 1$, f es biyectiva (le será útil verificarlo). Luego existe su inversa $f^{-1} : [1, \infty) \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, cuya regla de correspondencia la obtenemos "resolviendo" para x la ecuación $f(x) = y$:

$$f(x) = y \Rightarrow x^2 + 1 = y \Rightarrow x = \sqrt{y-1}$$

y por lo tanto $f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$.

Para finalizar esta sección hablaremos de la:

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Si $f : A \to B$ es una función biyectiva, obtenemos la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f, como sigue:

Si

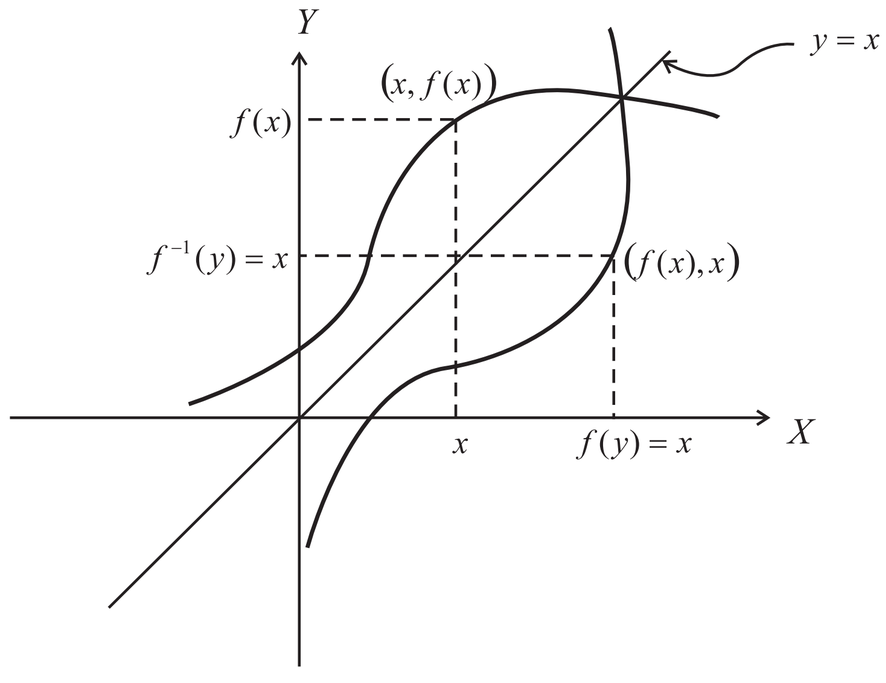
$$G_f = \{(x,\, f(x)) \mid x \in A\},$$

entonces

$$G_{f^{-1}} = \{(f(x),\, x) \mid x \in A\}.$$

En el caso particular en que A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$, en un sistema de coordenadas cartesiano lo anterior significa que para cualquier punto $P = (x,\, f(x))$ en la gráfica de f, existe un punto P' en la gráfica de f^{-1} que es simétrica a P con respecto a la recta $y = x$. Se obtiene entonces $G_{f^{-1}}$ reflejando G_f con respecto a la recta $y = x$, como si ésta fuera un espejo.

La siguiente figura ilustra esta afirmación:

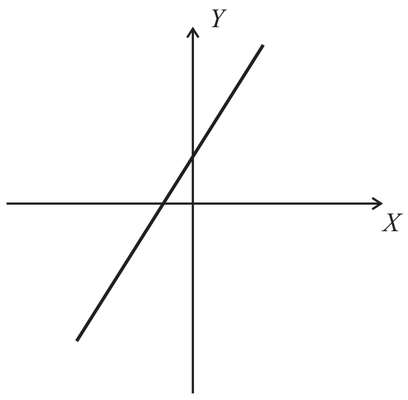


Ejercicios 7.

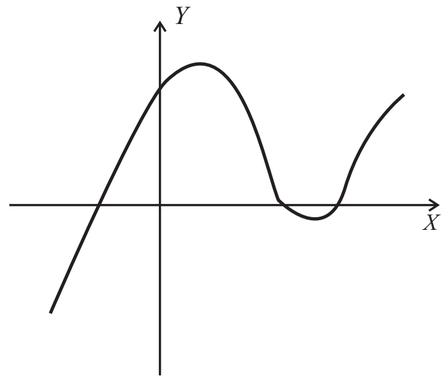
1. Determine, si existe, la inversa de la función $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ dada por $f(n) = 2n$. (Denotamos por $2\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales pares).

2. Abajo se muestran las gráficas de varias funciones. Determine cuál o cuáles de ellas tienen inversa y en caso de que tengan, grafique allí mismo su función inversa.

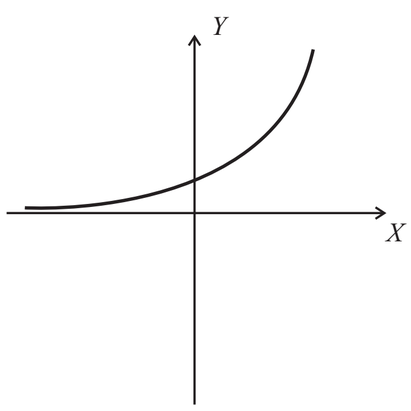
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



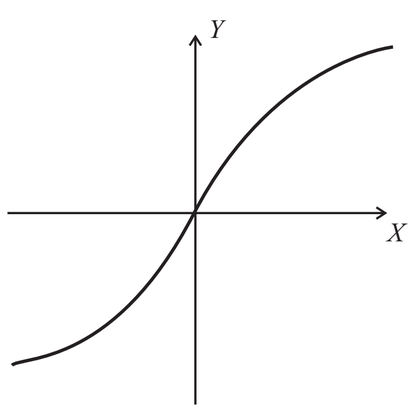
b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$



d) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



3. Sea $g(x) = -2x + 3$.

   a) Encuentre $g^{-1}(x)$.

   b) Evalúe $g(g^{-1}(6))$ y $g^{-1}(g(6))$.

c) $\forall\, x \in \mathbb{R}$ encuentre $g(g^{-1}(x))$ y $g^{-1}(g(x))$.

4. Determine el dominio máximo en el que la función $f(x) = x^2 + 4$ tiene inversa. Determine ésta.

5. Si la regla de correspondencia para una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $f(x) = x^2 - 2x + 4$, pruebe que si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$, existen las inversas de $f|_A$ y $f|_B$. Determine una fórmula para éstas y trace su gráfica.

6. Demuestre que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son biyectivas.

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

7. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice *monótona creciente* si

$$r \leq r' \Rightarrow f(r) \leq f(r') \qquad (r,\, r' \in \mathbb{R}).$$

   Demuestre que si f es biyectiva y monotona creciente entonces f^{-1} es también monótona creciente.

8. Dé dos ejemplos de funciones que cumplen la propiedad del ejercicio anterior.

9. Si $f : A \to B$ es una función, demuestre que

$$G_{f^{-1}} = \{(f(x),\, x) \mid x \in A\} \qquad \text{si existe } f^{-1}.$$

§10

4.10. Algebra de funciones reales

Así como nosotros operamos con números reales de tal manera que si sumamos (o bien multiplicamos) dos de ellos, el resultado es un número real, asímismo nuestro interés en esta sección será operar pares de funcines reales cuya resultante sea también un funcón real.

Consideremos la siguiente pareja de funciones:

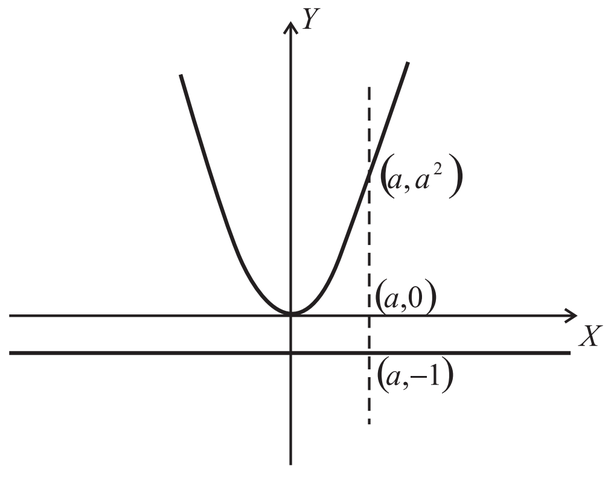
$$g(x) = -1 \quad \text{y} \quad f(x) = x^2,$$

donde $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sus gráficas son

$$G_f = \{(x,\ x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$G_g = \{(x,\ -1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

que representadas en el plano cartesiano serán:



Observemos que la recta vertical $x = a$ con a en el dominio de f y g (esto es, $a \in \mathbb{R}$) corta a estas gráficas en los puntos $(a,\ a^2)$, $(a,\ -1)$, respectivamente. Además, el punto $(a,\ a^2 + (-1))$ es un elemento de esta recta vertical. Un empleo adecuado del criterio de la recta vertical deja en claro que el conjunto G formado con todas las parejas ordenandas

$(a,\, a^2 + (-1))$ es la gráfica de alguna función real, además, dado $a \in \mathbb{R}$, $a^2 + (-1)$ es único.

Ahora bien, el conjunto G se puede escribir así:

$$G = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + (-1),\, x \in \mathbb{R}\},$$

o bien

$$G = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) + g(x),\, x \in \mathbb{R}\},$$

con lo cual vemos que si simbolizamos por h a la función real cuya gráfica es G, ésta cumple:

1. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. la regla de correspondencia es $h(x) = x^2 + (-1)$.

Observamos que para obtener cada imágen de h, basta sumar en $\mathbb{R}$ las respectivas imágenes de f y g para cada $x \in \mathbb{R}$ y que por esta razón se acostumbra decir que la función h es la "función suma de f y g".

Lo hecho hasta aquí, bien puede realizarse considerando un par de funciones reales arbitrarias f y g con tal de que ambas tengan el mismo dominio, aprovechando que cada imágen de f y g son elementos de $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}$ se puede sumar.

Consideremos la colección $\mathcal{A}$ de todas las funciones reales con dominio común un subconjunto de $\mathbb{R}$, esto es:

$$\mathcal{A} = \{f \mid f : A \to \mathbb{R}\}, \quad A \subseteq \mathbb{R}.$$

En $\mathcal{A}$ definimos una operación binaria: "la suma de funciones reales", como sigue:

Definición 4.10.1 Para cualesquiera funciones reales $f,\, g \in \mathcal{A}$, la **función suma** $f + g$ es otra función real $(f + g \in \mathcal{A})$ cuya regla de correspondencia es

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Observése que el símbolo "+" en la expresión "$f + g$" es meramente convencional, y que la expresión $f(x) + g(x)$ es el número real que resulta de sumar los números reales $f(x)$ y $g(x)$.

Reconsiderando el anterior ejemplo: la función suma de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = -1$ es la función $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + (-1) = x^2 - 1.$$

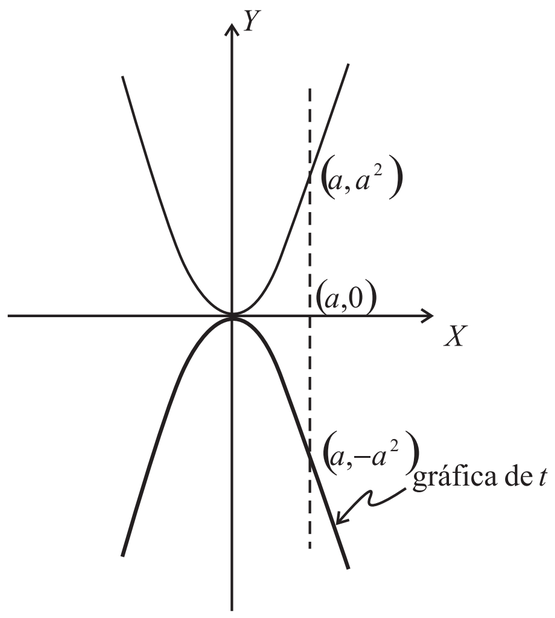
Ahora, igual que hicimos para definir la suma de funciones reales, intentaremos definir el producto. Para ello consideremos el conjunto de $\mathbb{R}^2$ definido así:

$$T = \{(a,\, (-1)a^2) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

cuya definición, como se ve está ligada a las funciones reales $f(x)^2$ y $g(x) = -1$. Una descripción como la hecha para el conjunto G, nos llevearía a que el conjunto T es la gráfica de alguna función t, a saber:

$$t : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{tal que} \quad t(x) = (-1)x^2,$$

cuya gráfica se puede obtener a partir de la gráfica de f, simplemente considerando que la segunda coordenanda del punto $(a,\, (-1)a^2)$ de la gráfica de t, se obtiene multiplicando en $\mathbb{R}$ las segundas coordenadas de los puntos $(a,\, a^2)$ y $(a,\, -1)$.



En este sentido, por abuso del lenguaje, podemos decir que:

"la gráfica de t se obtiene a partir de la gráfica de f, reflejándola con respecto al eje x".

Al estudiante no le será muy difícil convencerse de que una manera "natural" de dotar a la colección

$$\mathcal{A} = \{f \mid f : A \to B\}, \qquad A \subseteq \mathbb{R}$$

de una nueva operación, es la dada por la siguiente

Definición 4.10.2 Sean $f, g \in \mathcal{A}$. La función producto $f \cdot g$ es otra función de A en $\mathbb{R}$ definida por $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.

Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ entonces

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = x^2 \cdot x^3 = x^5.$$

Y si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ y $f, g : A \to \mathbb{R}$ son tales que $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$, entonces $fg : A \to \mathbb{R}$ y $(fg)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x^2-1}$.

Observese que el símbolo "$\cdot$" en la expresión $f \cdot g$, es una vez más, convencional y que para la definición del producto de funciones reales, nos hemos aprovechado del producto de los números reales. Por otra parte, el estudiante no debe confundir el símbolo de producto de funciones reales, con el de composición de funciones reales:

Este es el del producto: $\cdot$
Este es el de la composición: $\circ$

Resumiendo lo hecho hasta aquí de manera informal, es como sigue: A partir de pares de funciones reales, generamos nuevas funciones reales, a saber, la función suma y la función producto.

Observación: sea la función $g : A \to \mathbb{R}$ definida de esta forma $g(x) = r$, $r \in \mathbb{R}$ y sea $f \in \mathcal{A}$ cualquiera. La función producto $g \cdot f$ es una función de A en $\mathbb{R}$ tal que $(g \cdot f)(x) = f(x)$.

Es costumbre denotar a esta función producto así: rf, por ejemplo, si $f(x) = 3x - 1$ y $r = -5$ entonces

$$(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x) = (-5)(3x - 1) = -15x + 5.$$

Siguiendo con el programa tenemos a bien presentar las siguientes propiedades que se verifican para elementos de $\mathcal{A}$:

Sean f, g, h elementos de $\mathcal{A}$ y r, $s \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $f + g \in \mathcal{A}$.
2. $f + g = g + f$.
3. $(f + g) + h = f + (g + h)$.
4. $\mathcal{O} : A \to \mathbb{R}$ *denota la función tal que* $\mathcal{O}(x) = 0$ *para toda* $x \in A$, *entonces* $\mathcal{O} \in \mathcal{A}$ *y para toda* $f \in \mathcal{A}$,
$$f + \mathcal{O} = f.$$
5. *Si* $f \in \mathcal{A}$, *definiendo* $-f : A \to \mathbb{R}$ *tal que* $(-f)(x) = -f(x)$, *se tiene* $-f \in \mathcal{A}$ *y* $f + (-f) = \mathcal{O}$.
6. $f \cdot g \in \mathcal{A}$.
7. $f \cdot g = g \cdot f$.
8. *Si* $\mathbb{1} : A \to \mathbb{R}$ *es tal* $\mathbb{1}(x) = 1$ $\forall\, x \in A$, *se tiene que* $\mathbb{1} \in \mathcal{A}$ *y que* $\forall\, f \in \mathcal{A}$ $\mathbb{1} \cdot f = f$.
9. $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$.
10. $rf \in \mathcal{A}$.
11. $1 \cdot f = f$.
12. $(r + s) \cdot f = r \cdot f + s \cdot f$.
13. $r(f + g) = r \cdot f + r \cdot g$.
14. $r \cdot (s \cdot f) = (r \cdot s) \cdot f$.
15. $h \cdot (r \cdot g) = (r \cdot h) \cdot g = r \cdot (h \cdot g)$.
16. $f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot g$.

Como ejemplo demostraremos la propiedad (12) (recomendamos al educando que haga las demostraciones de las restantes propiedades). Veamos entonces que:

$$(r+s)\cdot f = r\cdot f + s\cdot f.$$

Tomemos $x \in A$, entonces

$$\begin{array}{rll} ((r+s)\cdot f)(x) &= (r+s)\cdot f(x) & (\text{definición de } r\cdot f)\\ &= r\cdot f(x) + s\cdot f(x) & (\text{distributividad en } \mathbb{R})\\ &= (r\cdot f)(x) + (s\cdot f)(x) & (\text{definición de } r\cdot f)\\ &= (r\cdot f + s\cdot f)(x) & (\text{definición de suma en } \mathcal{A}) \end{array}$$

Por lo tanto, $\forall\, x \in A\ ((r+s)\cdot f)(x) = (r\cdot f + s\cdot f)(x)$, así que las funciones $(r+s)\cdot f$ y $(r\cdot f + s\cdot f)$ son iguales.

Puédese también hablar de "resta" o "diferencia" de funciones de manera prácticamente natural.

Definición 4.10.3 Sean $f, g \in \mathcal{A}$. **La diferencia de** f y g es una nueva función de $\mathcal{A}$, denotada por $f-g$ y tal que $\forall\, x \in A$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, es decir, $f - g = f + (-g)$.

Y . . . ¿por qué no hablar del cociente de funciones? Intentemos definir el cociente de dos funciones reales $f, g \in \mathcal{A}$, de tal forma que resulte "natural" dicha definición. Pretendemos entonces exigirle a la "función cociente" $\frac{f}{g}$:

1. $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$.
2. Que la regla de correspondencia sea $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Obsérvese que la expresión $\frac{f(x)}{g(x)}$ es un cociente de números reales, en tanto que $\frac{f}{g}$ es nuevamente convencional. La dificultad a la que nos

enfrentamos es la posibilidad de existencia de elementos $x_0 \in A$ para los cuales $g(x_0) = 0$, ya que para estos elementos la expresión $\frac{f(x)}{g(x)}$ carece de sentido. Nos vemos entonces obligados a cambiar el dominio de la "función" $\frac{f}{g}$, eliminando del conjunto A aquellos x_0 que verifiquen: $g(x_0) = 0$.

Definición 4.10.4 Un punto $x_0 \in A$ se denomina **cero** de la función g si $g(x_0) = 0$.

Denotemos por B a la colección de puntos $x_0 \in A$ tales que x_0 es un cero de g, esto es:

$$B = \{x_0 \in A \mid g(x_0) = 0\}.$$

Ahora sí, ya es "natural" la:

Definición 4.10.5 Sean $f, g \in \mathcal{A}$. La **función cociente** de f y g, denotada por $\frac{f}{g}$ es la función $\frac{f}{g} : A - B \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \forall\, x \in A - B.$$

Por ejemplo, sean $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = x^2 - 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R} = A$. Hallemos el cociente $\frac{f}{g}$; para hallarlo, vemos que el conjunto de ceros de g es $B = \{-1, 1\}$. Entonces

$$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ y } x \neq 1\}$$

de tal forma que la función cociente $\frac{f}{g}$ será:

$$\frac{f}{g} : \mathbb{R} - B \to \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}.$$

La expresión $\frac{x^3+1}{x^2-1}$ siempre es un número real si $x \in \mathbb{R} - B$ pues $x \neq -1$ y $x \neq 1$.

Ejercicios 8.

1. Calcular $r \cdot f$ para cuando $f(x) = |x|$, $(A = \mathbb{R})$ y $r \neq -\frac{1}{2}$.

2. Sean $A = \mathbb{R}$ y f, g las funciones dadas por:

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = 3x - 4.$$

   Sean además $r = -4$ y $s = 7$. Calcular

   a) $f - g$.
   b) $r \cdot (f - g)$.
   c) $sf + rg$.
   d) $f^4 \quad (f^4 = f \cdot f \cdot f \cdot f)$.

3. ¿Será cierto que para toda $f \in \mathcal{A}$ existe $f' \in \mathcal{A}$ tal que $f \cdot f' = \mathbb{1}$? ¿y si se supone que $f \neq \mathcal{O}$?

4. Demostrar todas las propiedades mencionadas en la página 264.

5. Hallar el dominio de definición de $\frac{f}{g}$ en cada caso y calcular la función. En todos los casos $A = \mathbb{R}$.

   a) $f(x) = |x|$, $g(x) = 3x + 1$.
   b) $f(x) = x - 2$, $g(x) = ax + b$ con $a \neq 0$ y b fijos.
   c) $f(x) = x - 2$, $g(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$.
   d) $f(x) = 5$, $g(x) = \sqrt{4 + x^2}$.
   e) $f(x) = |x - 1|$, $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

6. Sea $f(x) = x^2$. Hallar los $x \in \mathbb{R}$ que verifiquen cada una de las siguientes ecuaciones:

   a) $f(-x) = f(x)$.
   b) $f(y) = 7f(x) + (y - x)(y + x)$.
   c) $f(x + h) - f(x) = 2x + h^2$.
   d) $f(2y) = 4f(y)$.
   e) $f(z^2) = (f(z))^2$.
   f) $f(a) = |a|$.

7. ¿Es posible hacer el cociente $\frac{f}{g}$ si $g = \mathcal{O}$?

§11

4.11. Algunas funciones especiales

Una función importante para nosotros es la función identidad en $\mathbb{R}$, $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $id(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$ que junto con la definición de potenciación vista en el capítulo 3 sección 5 y el álgebra de funciones vista en la sección anterior, nos permite definir una clase importante de funciones, las llamadas **funciones potenciales**.

Definición 4.11.1 Una **función potencial** es una función de la forma $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Observemos que las definiciones de producto de funciones y potencias naturales, efectivamente para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n es una función, por ejemplo:

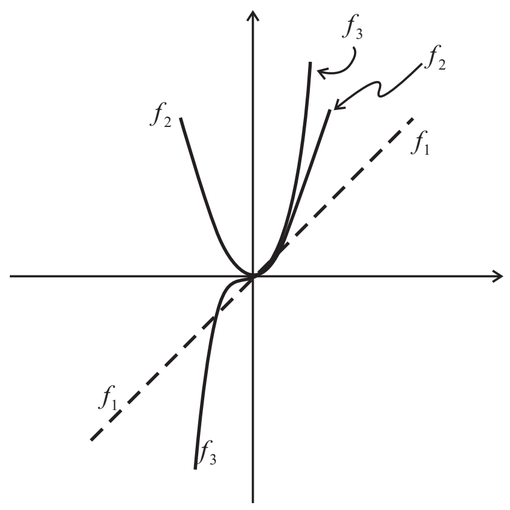
Si $n = 1$ $\quad f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por $f_1(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$
Si $n = 2$ $\quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por $f_2(x) = x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$
Si $n = 3$ $\quad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por $f_3(x) = x^3 \ \forall x \in \mathbb{R}$
$\vdots$ $\quad$ etc.

Las gráficas de algunas de estas funciones, que seguramente el alumno reconocerá, las tenemos en la siguiente figura:

También observemos que la función potencial f_n puede ser multiplicada por un número real cualquiera y seguimos obteniendo una función: $\forall a \in \mathbb{R} \quad g(x) = af_n(x) = ax^n$ (¿Cómo es la gráfica de g?). Si además para $m \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ definimos la regla de correspondencia $h(x) = bx^m$ para cada $x \in \mathbb{R}$ podemos considerar la función.

$$(g + h)(x) = g(x) + h(x) = ax^n + bx^n.$$

(¿Cuál es su dominio máximo de definición?) que junto con las funciones potenciales son casos particulares de las así llamadas funciones polinomiales.



Definición 4.11.2 Sean a_0, a_1, a_2, $\ldots$, $a_n \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Diremos que una función f es una **función polinomial** si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.

Es costumbre llamar a la función f, polinomio en x y cada a_kx^k término $k-$ésimo del polinomio. También si $a_n \neq 0$ se dice que f tiene grado n y se denota como $\text{gr}\,(f) = n$.

Definimos ahora otro tipo de funciones que están íntimamente relacionadas con las funciones polinomiales. De la sección anterior sabemos que si $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ con A, $B \subseteq \mathbb{R}$ son funciones entonces podemos definir la función $\frac{f}{g} : C \to \mathbb{R}$ con

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \cap B \quad \text{y} \quad g(x) \neq 0\}.$$

En este sentido damos la siguiente definición.

Definición 4.11.3 Sean $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$, $a_n \neq 0$ y $g(x) = b_mx^m + \cdots + b_1x + b_0$, $b_m \neq 0$ polinomios cualesquiera. A la función $h : \mathbb{R} - A \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0}{b_mx^m + \cdots + b_1x + b_0}$$

donde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$, le llamaremos **función racional**.

Los siguientes ejemplos muestran algunas funciones de esta clase:

Ejemplos:

4. $h : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \frac{x^2}{x-1}$ cuya regla de correspondencia también puede expresarse como $h(x) = (x+1) + \frac{1}{x-1}$.

5. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \frac{x^2+3x+5}{x^2+1}$ que también la podemos expresar como $g(x) = 1 + \frac{3x+4}{x^2+1}$.

6. $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia está dada por $f(x) = \frac{x^3+3x+5}{x^2-1} = x + \frac{4x+5}{x^2-1}$.

7. $h : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \frac{1}{x}$.

8. $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $forall\, x \in \mathbb{R} \quad r(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

A continuación consideremos la función *valor absoluto*. Recordemos que, por definición, $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y entonces podemos definir la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ a la que llamaremos **función valor absoluto** que ya comentamos en el ejemplo 3 de la 230.

Observemos que esta función no es inyectiva pues $f(1) = f(-1) = 1$ y que no es suprayectiva pues para $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$|x| = -\frac{1}{2}$ (¿o sí?). Sin embargo, al igual que en el ejemplo 3 de esta sección, podemos modificar el dominio y codominio de f de tal forma que obtengamos una función biyectiva:

$$f|_{\mathbb{R}_-} : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+ \quad \text{dada por} \quad f|_{\mathbb{R}_-}(x) = f(x) = |x| = -x$$

y que, como el educando recordará, tiene una inversa, ¿cuál es? Por favor, calculela.

Definimos ahora para $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\forall\, x \in \mathbb{R}\ g(x) = |ax + b|$ con $b \in \mathbb{R}$. Si usamos la definición de valor absoluto obtendremos

$$g(x) = |ax + b| = \begin{cases} ax + b & \text{si } ax + b \geq 0 \\ -(ax + b) & \text{si } ax + b < 0 \end{cases}$$

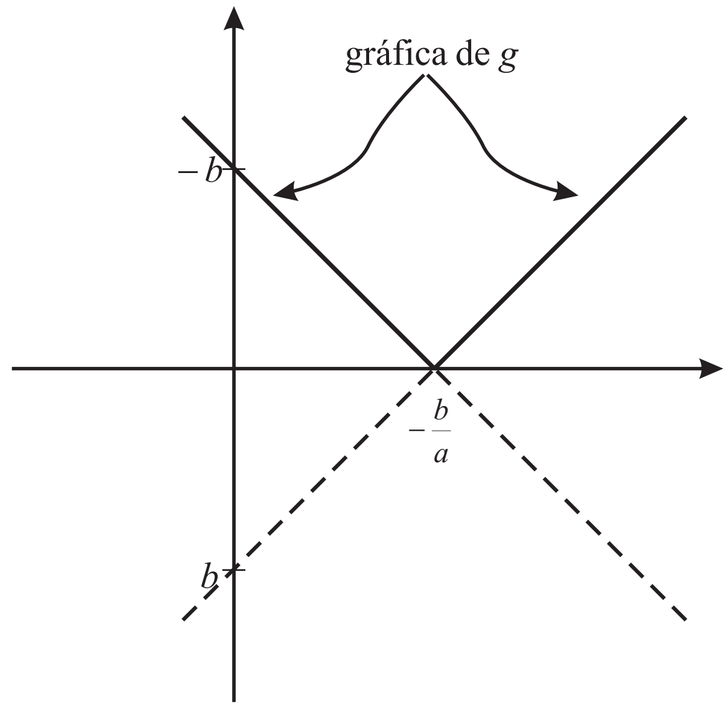
$$= \begin{cases} ax + b & \text{si } x \geq -\frac{b}{a} \text{ y } a > 0 \\ -ax - b & \text{si } x < -\frac{b}{a} \text{ y } a > 0. \end{cases}$$

o bien

$$g(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq -\frac{b}{a} \text{ y } a < 0 \\ -ax - b & \text{si } x > -\frac{b}{a} \text{ y } a < 0. \end{cases}$$

En la figura siguiente mostramos la gráfica de g en el caso especial que $a > 0$ y $b < 0$.

g no es biyectiva (¿Por qué?) pero $g|_A : A \to \mathbb{R}_+$ y $g|_B : B \to \mathbb{R}_+$ donde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\}$ sí lo son, lo cual es un ejercicio para el lector. También es un ejercicio el calcular las funciones



inversas de $g|_A$ y $g|_B$.

Sea ahora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x^2 - 1|$ entonces

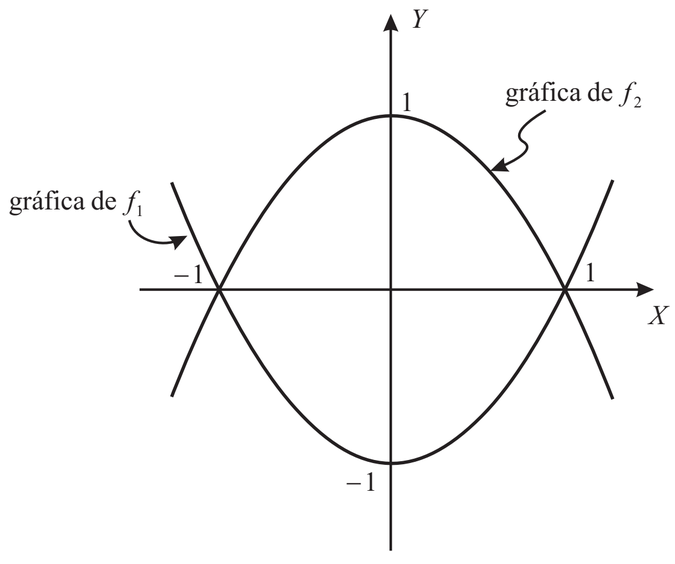
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x^2 - 1 \geq 0 \\ -(x^2 - 1) & \text{si } x^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

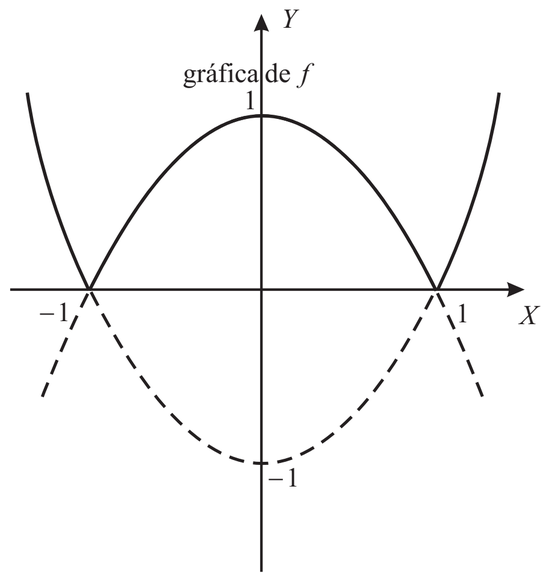
$$= \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x^2 \geq 1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } x^2 < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \geq -1 \quad \text{ó} \quad x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 1. \end{cases}$$

Por lo tanto si definimos las funciones f_1, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f_1(x) = x^2 - 1$ y $f_2(x) = -x^2 + 1$, en la siguiente figura vemos como se obtiene la gráfica de f a partir de las gráficas de f_1 y f_2:

Observamos que $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = |(-x)^2 - 1| = |x^2 - 1| = f(x)$, lo que nos dice que la función es simétrica con respecto al eje Y (como seguramente el lector ya lo notó en la figura anterior) y por lo tanto





la función no es inyectiva (¿Por qué?); por tanto no tiene inversa. Sin embargo, si definimos $g : (-\infty, -1) \to \mathbb{R}_+$ dada por $g(x) = f(x) = x^2 - 1$ ésta si tendrá inversa cuya regla de correspondencia es $g^{-1}(y) = \sqrt{1+y}$. Una vez más dejamos al lector que compruebe estas afirmaciones.

Función Máximo Entero.

Recordemos que una propiedad de los números reales, vista en el capítulo anterior, versa así.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{Z} \quad \text{tal que} \quad n_0 \leq x < n_0 + 1$$

y que en base a esta propiedad definimos la parte entera del número real x como n_0, denotado así: $[x] = n_0$. Con esto en mente definimos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = [x]\ \forall\, x \in \mathbb{R}$; que de aquí en adelante llamaremos función máximo entero.

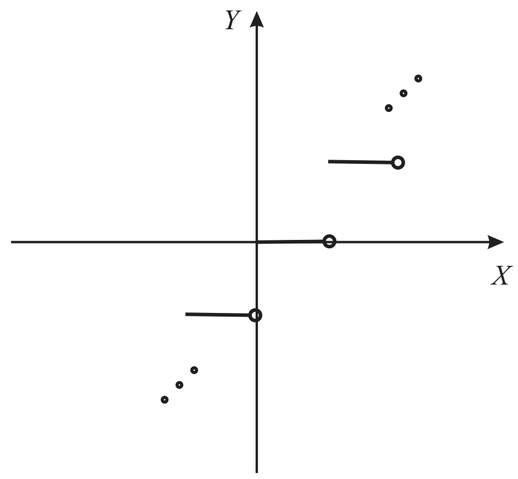
Observemos que:

para $0 \leq x < 1$,	$f(x) = [x] = 0$
y si $1 \leq x < 2$,	$f(x) = [x] = 1$
igualmente si $-1 \leq x < 0$,	$f(x) = [x] = -1$
y para $-2 \leq x < -1$,	$f(x) = [x] = -2$

es decir,

$$f(x) = \begin{cases} \vdots & \\ -1 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ \vdots & \end{cases}$$

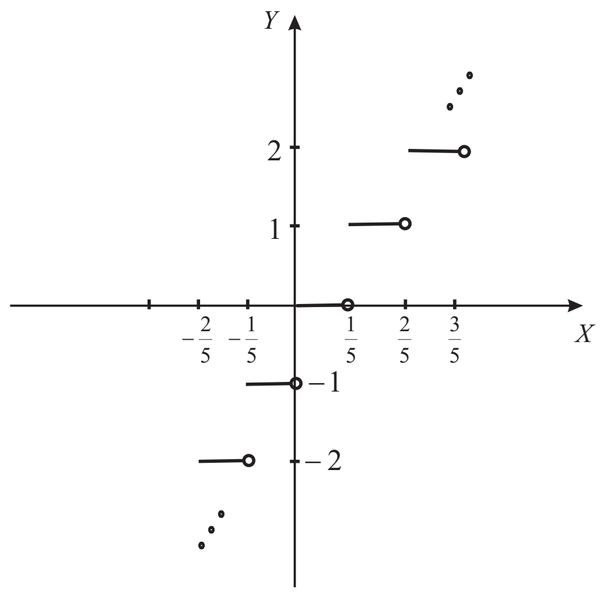
y en consecuencia su gráfica es:



Consideremos ahora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = [5x]$ entonces, como para $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$, $n \leq 5x < n + 1$, se tiene que $\frac{n}{5} \leq x < \frac{n}{5} + \frac{1}{5}$ y en consecuencia si $0 \leq x\frac{1}{5}$ entonces $0 \leq 5x < 1$ lo cual implica que $g(x) = 0$. Además, si $\frac{1}{5} \leq x < \frac{2}{5}$, entonces $1 \leq 5x < 2$ y por lo tanto $g(x) = 1$. Por consiguiente podemos escribir la regla de correspondencia de g así:

$$g(x) = \begin{cases} \vdots & \\ -1 & \text{si} \quad -\frac{1}{5} \leq x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{1}{5} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{5} \leq x < \frac{2}{5} \\ \vdots & \end{cases}$$

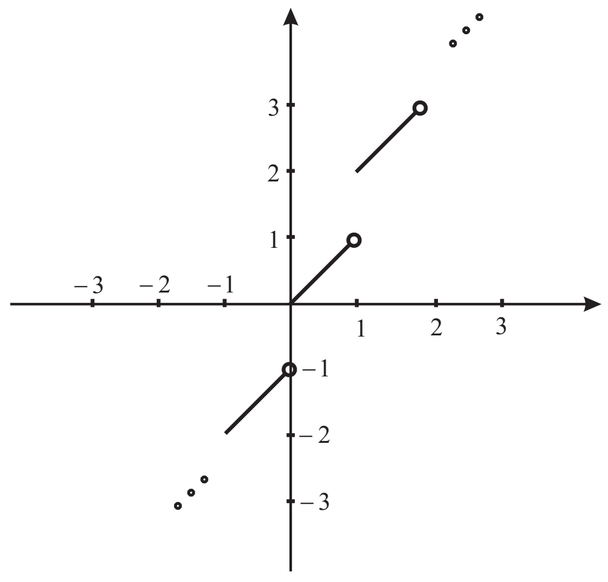
y por lo tanto la gráfica de g es como la gráfica de la función del ejemplo anterior pero ahora la longitud de los "escalones" es de $\frac{1}{5}$ en lugar de 1:



Finalmente, si $r(x) = x + [x]$, entonces para $x \in [n,\, n+1)$, con $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que $[x] = n$ y, por tanto, $r(x) = x + [x] = x + n$, es decir:

$$r(x) = \begin{cases} \vdots & \\ x - 1 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ x + 1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ x + 2 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \end{cases}$$

y por lo tanto, la gráfica de r es la siguiente:



Ejercicios 10.

1. Dibuje una recta horizontal y una recta vertical que pase por el punto (2, 5).

   a) ¿Cuál es la ecuación de la recta horizontal y cuál la de recta vertical?

   b) La ecuación de la recta vertical ¿representa una función?, ¿por qué?

   c) La ecuación de la recta horizontal ¿representa una función?, ¿por qué?

2. Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas f, encuentre $\operatorname{Im} f$ y $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f|_A$ tenga inversa. Calcule $(f|_A)^{-1}$.

   a) $f(x) = -x^2 + 3$.
   b) $f(x) = x^2 + 6x - 16$.
   c) $f(x) = 2x^2 + 7x - 15$.
   d) $f(x) = -2x^2 + 11x - 12$.

3. Dadas las funciones $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x - 7 & \text{si} \quad x \leq -4 \\ x^2 + 1 & \text{si} \quad -4 < x < 4 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$$

   y

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2}{x-2} & \text{si} \quad x > 2 \\ -x^2 + 5 & \text{si} \quad x \leq 2 \end{cases}$$

   calcular $f + g$, $f \cdot g$, $f \circ g$ y $\frac{f}{g}$.

4. Dibuje las gráficas de

   a) $f(x) = |2x + 5|$.
   b) $f(x) = |-6x - 5|$.
   c) $f(x) = |x| + x$.
   d) $f(x) = |x||x - 1|$.
   e) $f(x) = x - [x] + 1$.
   f) $f(x) = [x] + [-x] + 1$.

5. En los ejercicios 4 (c) y 4 (f) dé respuestas a las siguientes preguntas

a) ¿es f inyectiva?

b) ¿es f suprayectiva?

c) ¿$\exists\, A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f|_A$ sea biyectiva?, si la respuesta es afirmativa, diga quien es A y calcule $(f|_A)^{-1}$.

6. ¡¡Ya Basta!! se apresura a decir Don Próspero Torres y aclara que ya hemos logrado nuestro ...